Recebido: 19-06-2024 | Aprovado: 28-08-2024 | DOI: https://doi.org/10.23882/rmd.24236

Comprensión del concepto de Límite de una Función Real en diferentes etapas académicas de nivel superior

Understanding the concept of the Limit of a Real Function in different academic stages of higher education.

América Guadalupe Analco Panohaya,
Instituto Tecnológico de Puebla, México
(ame.lups@gmail.com)

Lidia Aurora Hernández Rebollar,
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México,
(lidia.hernandez@correo.buap.mx)

Resumen
En este trabajo de corte cualitativo con un enfoque interpretativo, se analizó la comprensión del concepto de límite de una función de variable real, en cinco estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla que cursaban diferentes etapas de los programas de licenciatura y posgrado en ciencias matemáticas. El diseño y análisis de las actividades realizadas por los informantes se enmarcan en las teorías APOE y de Representaciones Semióticas. El propósito fue explorar cómo cambia la comprensión del límite de una función a lo largo de la formación de los estudiantes de matemáticas, desde el punto de vista de la teoría APOE. En el análisis se consideraron también los diferentes registros semióticos, y se identificaron dificultades que podrían prevalecer en los estudiantes a lo largo de su formación en matemáticas. La metodología de esta investigación se fundamentó en el ciclo de la teoría APOE formado por tres componentes: el análisis teórico, el diseño y aplicación de cuestionarios y el análisis y verificación de datos. Del análisis de los resultados se desprende que, el alumno de doctorado ha construido el Objeto límite de una función de variable real, realizó todas las transformaciones semióticas solicitadas en los registros dados utilizando un lenguaje formal y preciso. Mientras que, los alumnos de maestría y licenciatura mostraron evidencia de una concepción Proceso del límite de una función en construcción y tuvieron dificultades para hacer algunos tratamientos en el registro algebraico.

Palabras clave: Límite, comprensión, teoría APOE, nivel superior.

Abstract
In this qualitative study with an interpretive approach, the understanding of the concept of the limit of a real-variable function was analyzed in five students from the Faculty of Physical and Mathematical Sciences at the Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, who were at different stages of their undergraduate and graduate programs in mathematical sciences. The design and analysis of the activities carried out by the participants are framed within the APOS theory and the Theory of Semiotic Representations. The purpose was to explore how the understanding of the limit of a function change throughout the students' mathematical education from the perspective of APOS theory. The analysis also considered different semiotic registers and identified difficulties that might persist among students during their mathematical training. The methodology of this research was based on the APOS theory cycle, which consists of three components: theoretical analysis, the design and application of questionnaires, and the analysis and verification of data. The analysis of the results indicates that the doctoral student has constructed the Object of the limit of a real-variable function, performing all the requested semiotic transformations in the given registers using formal and precise language. Meanwhile, the master's and undergraduate students showed evidence of a Process conception of the limit of a function under construction and had difficulties performing some treatments in the algebraic register.

Keywords: Limit, understanding, APOE theory, higher education.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de límite es de suma importancia en los planes de estudio tanto de nivel medio como superior, pues resulta fundamental para la comprensión de otros conceptos tales como continuidad, derivada, integral y convergencia de sucesiones. No obstante, la comprensión de este concepto es compleja. Cottrill et al. (1996) demostraron que el concepto de límite no es estático como se cree. Por el contrario, requiere de una concepción dinámica que tiene un esquema muy complejo y para comprender su definición formal, se necesita que los estudiantes tengan una concepción de cuantificación bien construida. Para Swinyard y Larsen (2012) los estudiantes muestran dos dificultades, la primera consiste en enfocarse primeramente en las aproximaciones en el eje X y posteriormente en el eje Y. La segunda se relaciona con el significado de qué es estar infinitamente cerca de un punto. Mientras que para Medina (2001), el concepto de límite desempeña un papel fundamental en el ámbito conceptual del cálculo, y su complejidad representa una fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Esta dificultad surge, en primer lugar, debido a su naturaleza estructural, que lo sitúa como el núcleo central y concepto fundamental sobre el cual se edifica la estructura del Cálculo Diferencial e Integral, así como otros conceptos de diversas ramas de las matemáticas. Hasta aquí, se han mencionado algunas de las dificultades estudiantiles para acceder al concepto de límite de una función real. Pero comprenderlo es primordial, en este sentido, Buendía y Molfino (2010) mencionan que la definición formal de límite surgió por una necesidad interna de la estructura matemática con la finalidad de generalizar a nuevas funciones, nuevos contextos y estructurar otros conocimientos, pues a partir de la definición de límite se reformulan conceptos y definiciones tales como derivada, continuidad, entre otros. De igual forma, Usman et al. (2017) mencionan que, “comprender el límite de una función es fundamental, porque consiste en la comprensión del concepto básico del análisis matemático el cual tiene un papel importante en la comprensión de la diferenciación, el análisis integral y matemático” (p. 2). Considerando la importancia del concepto de límite de una función, resulta interesante conocer cómo evoluciona la comprensión de este concepto durante la formación en Matemáticas que se imparte en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Con este fin, se compararon las estructuras y los mecanismos mentales relacionados con el concepto de límite de una función de una variable real en cinco estudiantes que se encontraban en diferentes etapas de su formación como matemáticos. Se desea explorar cómo cambian las estructuras mentales y si existen dificultades que prevalecen a lo largo del programa de estudios, desde licenciatura hasta doctorado.

2. MARCO TEÓRICO

Esta investigación está sustentada en dos teorías: la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas. Según Hernández-Rebollar et al. (2023) APOE es una teoría constructivista del aprendizaje de conceptos matemáticos avanzados, basada en las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema para caracterizar el pensamiento al estudiar un concepto. Mientras que la teoría de representaciones semióticas, “proporciona las herramientas conceptuales para analizar la flexibilidad en el uso de diferentes representaciones y su papel en la comprensión de las ideas matemáticas en consideración” (Trigueros y Martínez, 2010, p. 5). Ambas teorías proporcionan herramientas para estudiar la comprensión de conceptos matemáticos, la primera enfatizando aspectos cognitivos (estructuras y mecanismos mentales) y la segunda destacando el papel de la semiótica. Cabe mencionar que “estos dos marcos conceptuales se pueden utilizar de forma coherente y complementaria, tanto a la hora de analizar las respuestas y estrategias de los estudiantes cuando trabajan en tareas como para diseñar la instrucción en el futuro” (Trigueros y Martínez, 2010, p. 6). Después de presentar una descripción breve de estas teorías, en la sección de metodología se explicita la forma en que estas se utilizaron en esta investigación.

2.1 La teoría de registros de representación semiótica

La teoría de representaciones semióticas propuesta por Duval (1993) proporciona un marco para el análisis del conocimiento matemático, que considera no solo la naturaleza de los objetos estudiados, sino también la forma en que se nos presentan y cómo podemos acceder a ellos por medio de nuestros sentidos y pensamiento. Esta teoría parte de que los objetos matemáticos no son tangibles y por ende solo se puede acceder a ellos a través de una representación semiótica, que no es como tal el objeto, sino un medio para acceder a él.

Cabe resaltar que un registro semiótico debe permitir tres actividades cognitivas: la formación de una representación identificable, el tratamiento y la conversión. La formación de una representación identificable se asocia con la expresión de una representación mental del objeto. El tratamiento es una transformación interna de la representación en el mismo registro dado y la conversión es una transformación externa, es decir, representa la transición de un registro a otro registro. La coordinación de los diferentes registros es necesaria, pues el dominio de uno de ellos no permite el aprendizaje integral del concepto. Por tal motivo, la enseñanza del concepto de límite no se debe restringir a trabajar con un solo registro. Blázquez y Ortega (2001) afirmaron que “el concepto de límite funcional parte del concepto de función, utiliza sus representaciones, y diversas investigaciones sobre este tópico y sus representaciones sugieren considerar los siguientes sistemas: verbal, numérico, gráfico y algebraico” (p. 225).

2.2 Teoría APOE

La teoría APOE surgió cuando Dubinsky (1991) reflexionó sobre la aplicación de la abstracción reflexiva de Piaget en las matemáticas, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extendió la idea a nociones matemáticas de educación superior. Dubinsky (1991) interpretó a las Acciones materiales y mentales como las acciones que son llevadas a cabo por el sujeto, pero que son externas a él. Dentro de la teoría APOE, las operaciones interiorizadas de Piaget se convirtieron en el mecanismo mental de interiorización en el cual, una Acción física o mental que el sujeto considera como externa se reconstruye en la mente del sujeto en un Proceso, es decir, se realiza la misma Acción, pero completamente en la mente del sujeto. Esta noción de la abstracción reflexiva influyó en el desarrollo de la teoría APOE, de cómo un Proceso (Acción interiorizada) se transforma en un Objeto (construcción sobre la cual, en etapas superiores se pueden realizar nuevas operaciones) a través del mecanismo mental de la encapsulación.

Dubinsky interpretó estas situaciones como el desarrollo cognitivo que empieza con Acciones, que son interiorizadas en Procesos y luego se encapsulan en Objetos a los que se le pueden aplicar nuevas Acciones, todo ello forma un Esquema. Pareciera que la propuesta progresiva en la teoría es de la forma A→P→ O→E, sin embargo, el desarrollo no siempre procede así, más bien, un individuo puede avanzar y retroceder entre las distintas etapas.

La complejidad del concepto de límite y la participación del infinito en su construcción llevaron a la necesidad de incluir a la estructura Totalidad que "permite ver el Proceso de infinito como un todo, como una entidad estática sobre la que, no necesariamente, es posible aplicar Acciones. En el contexto del infinito, la estructura de Totalidad se ubica entre el Proceso y el Objeto". (Hernández Rebollar et al., 2023, p. 120).

2.2.1 Descomposición genética

Trigueros y Oktaç (2019) definen a una descomposición genética (DG) como:

> Un modelo hipotético que describe las estructuras y mecanismos involucrados en la construcción de un concepto matemático. Una DG predice cómo un estudiante construye un concepto; debe ser probada experimentalmente y refinada si es necesario. Cabe mencionar que una DG no es única, es decir, no hay pretensión en la teoría de describir cómo se construye exactamente un concepto (p. 45).

En esta investigación se consideran dos maneras de entender al límite de una función, una es conocida como concepción dinámica y la otra como concepción métrica.

> La concepción dinámica del límite de una función supone construir un proceso en el dominio en el cual x se aproxima a a, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x)$ se aproxima a L y utilizar la función para coordinarlos.
> La concepción métrica en términos de desigualdades es aquella que se deriva de la construcción de un proceso en el dominio en el cual $x - a$ en valor absoluto se aproxima a 0, construir otro proceso en el rango en el cual $f(x) - L$ en valor absoluto se aproxima a 0, y coordinarlos (Pons, 2014, p.101-102).

Para la descripción teórica de la concepción dinámica se utilizó la DG de Hernández-Rebollar et al. (2023), y para la concepción métrica se utilizó la DG de Swinyard y Larsen (2012).

La DG de Hernández-Rebollar et al. (2023) es un refinamiento de la propuesta por Cottrill et al. (1996); se centró en describir las estructuras y los mecanismos mentales en diferentes registros semióticos que son necesarios para construir la concepción dinámica del límite de una función real. Propone una estructura Objeto del límite de una función en su concepción dinámica e incorpora a la estructura Totalidad del infinito. Esta investigación es muy importante para esta investigación debido a que “una DG que contemple los distintos registros de representación del concepto de límite puede lograr mejores caracterizaciones de las estructuras mentales logradas por los estudiantes” (Morante, 2020, p.99).

2.2.2 Resumen de la DG de la concepción dinámica de límite de Hernández-Rebollar et al. (2023):

Acciones

Dado un elemento cualquiera del dominio, cercano al valor $x = a$, el estudiante realiza la Acción de asociar este valor con su imagen bajo la función f, en cada uno de los registros semióticos de la función.

Dos estructuras de proceso, una en el dominio y otra en el rango

Al repetir las Acciones de asociación de un valor en el dominio, cercano a $x = a$ con su respectiva imagen, por la izquierda y por la derecha, utilizando una diversidad de funciones representadas en cada uno de los distintos registros de representación, y reflexionar, en cada ocasión, cuando esto sea posible, el estudiante interioriza dichas Acciones en dos Procesos de aproximación infinita, uno en el dominio y otro en el rango.

Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real

El estudiante al coordinar los procesos previamente descritos utilizando diferentes representaciones semióticas, en las que el límite exista o no, construye un nuevo Proceso mediante el cual será capaz de apreciar y representar de diversas maneras las aproximaciones conjuntas; de x acercándose al valor a y de $f(x)$ aproximándose o no a un cierto valor L.

Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite

Siempre que el límite L de una función f exista en $x = a$, el estudiante podrá dar evidencia de ver el Proceso coordinado de aproximación infinita como terminado y manifestar que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, en cualquiera de los registros semióticos en los que se presente esta situación. En situaciones donde los límites laterales de una función no coinciden, el estudiante puede determinar estos límites y argumentar que el límite de la función no existe debido a la disparidad entre ambas aproximaciones infinitas.

Objeto de la concepción dinámica del límite

A través de acciones sobre el límite dinámico evidenciando la Totalidad del infinito, el alumno encapsula la concepción dinámica del límite en el Objeto y es capaz de realizar nuevas Acciones sobre él como, por ejemplo, aplicar sus propiedades.

2.2.3 DG de la Concepción métrica de Swinyard y Larsen (2012)

En el trabajo de Swinyard y Larsen (2012), los autores presentaron dos tareas: la primera consistió en realizar un diseño de actividades para una instrucción didáctica basada en el trabajo de Cottrill et al. (1996) y a partir de esta, proponer una descripción del concepto de límite, pues se percataron que los resultados de Cottrill et al. (1996) no daban evidencia de la concepción métrica del concepto de límite de una función real. La segunda tarea consistió en la validación de la propuesta realizada. A continuación, se presenta la DG de Swinyard y Larsen (2012, como se citó en Morante, 2020):

1. La acción de evaluar f en un solo punto x que se considera cercano, o incluso igual al valor a.
2. La acción de evaluar la función f en unos pocos puntos, cada punto sucesivo más cercano al valor a que el anterior.

3. Construcción de un esquema coordinado de la siguiente manera:

   (a) Interiorización de la acción del paso 2 para la construcción de un proceso en el dominio en el que x se aproxima al valor a.

   (b) Construcción de un proceso en el rango en el que y se aproxima al valor L.

   (c) Coordinación de (a), (b) a través de f. Es decir, la función f se aplica al proceso de x aproximándose al valor a para obtener el proceso de $f(x)$ aproximándose a L.

4. Construir un proceso mental en el cual uno prueba si un candidato es un límite:

   a) Elegir una medida de proximidad al valor límite L a lo largo del eje Y;

   b) Determinar si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite (es decir a) para el cual el valor de la función, aparte del que está en ese punto, está lo suficientemente cerca de L;

   c) Repetir los pasos (a) y (b) para cada vez más pequeñas medidas de cercanía.

5. Asociar la existencia de un límite con la capacidad de continuar (teóricamente) este proceso para siempre, sin dejar de producir el intervalo deseado sobre a, o de manera equivalente, con la observación de que no hay un caso en el que será imposible encontrar dicho intervalo.

6. Encapsular este proceso a través de la noción de cercanía arbitraria. Esto implica darse cuenta de que se puede establecer que el proceso en el paso 4 funcionará para todas las medidas de cercanía demostrando que funcionará para una medida arbitraria de cercanía.

3. MÉTODO

Esta investigación es de corte cualitativo con un enfoque interpretativo. La metodología de este trabajo se enmarca en el ciclo de investigación propio de la teoría APOE de tres componentes: análisis teórico, diseño de los instrumentos de investigación y recopilación y análisis de los datos. La primera componente se conforma de las DG mencionadas en el marco teórico, la segunda componente consistió en la selección de cinco actividades que fueron diseñadas por Morante (2020). Así, en esta investigación se reporta la implementación de las actividades y el análisis de los datos, que corresponde a la tercera componente del ciclo.

Las teorías APOE y la de Registros de Representación Semiótica participan en las tres etapas de la investigación, pues se describen las estructuras mentales en los registros semióticos en los que se representa a una función real, a saber, el numérico, el algebraico y el gráfico. De esta manera, se pretende dar cuenta de la comprensión del concepto de límite en los diferentes registros de representación semiótica. Tomando como referencia a Prediger et al. (2008) estas teorías se combinan para obtener una visión multifacética de la comprensión del límite de una función, se utilizan como dos lentes para mirar un mismo fenómeno.

3.1 Informantes

Los informantes fueron cinco estudiantes de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP). El primer estudiante ($L1$) cursaba la primera mitad de la carrera de matemáticas y acababa de acreditar la asignatura de cálculo diferencial en una variable. El segundo ($L2$) tenía un año de haber cursado esta misma materia y al momento de ser encuestado, acababa de cursar la materia de cálculo diferencial en varias variables, que pertenece a la segunda mitad de la carrera de matemáticas. El tercero (*M1*) estaba cursando el primer año de la maestría en Matemáticas, el cuarto *(M2)* estaba cursando el segundo año de la misma maestría. Finalmente, el quinto estudiante *(ED)* estaba cursando el doctorado en Matemáticas. Los estudiantes de posgrado realizaban su trabajo de tesis en el área de análisis matemático. Todos los participantes fueron de sexo masculino y su participación fue voluntaria.

3.2 Actividades

En esta sección se exponen las actividades que se aplicaron a los estudiantes, las cuales fueron extraídas de la tesis de Morante (2020). Asimismo, se proporcionan los objetivos de cada una de estas.

Actividad 1

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x, & si\ -1 \leq x < 1 \\ x-1, & si\ 1 \leq x < 3 \end{cases}$

x	-1.00	0.00	0.50	0.85	0.98	...	1.01	1.04	1.07	1.10	1.21
$f(x)$						...					

a) Calcula los valores $\boldsymbol{f(x)}$ para los $\boldsymbol{x}$ propuestos en la siguiente tabla.

b) ¿A qué número se aproxima x?

c) ¿A qué número se aproxima $f(x)$?

d) Describe el comportamiento de $f(x)$ cuando x se aproxima al valor dado en el inciso b

e)¿Cuál sería el límite de f cuando x se aproxima a 1? Argumenta tu respuesta

a) Evalúa si el estudiante realiza Acciones en el registro algebraico-numérico, es decir, si asocia los valores de la tabla cercanos a $x = 1$ con su imagen bajo la función f.

b) Evidencia el Proceso dominio, es decir, centra su atención en el dominio de la función y expresa que los valores de x dados, se aproximan cada vez más al valor de interés $x = 1$

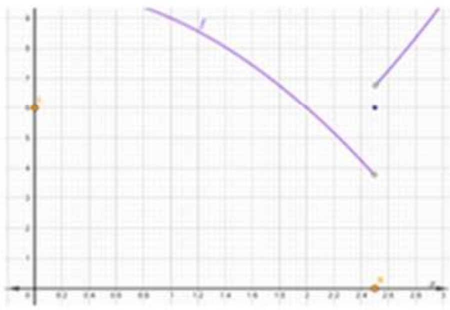
c) Muestra que ha interiorizado las Acciones del inciso a), pero esta vez centrando su atención en el rango, para notar lo que ocurre con los valores $f(x)$ cuando se comparan con $f(1)$ y que esa reflexión lo lleve a construir el Proceso rango, para concluir que las imágenes de $f(x)$ por la izquierda se aproximan al valor 1 y por la derecha al valor 0.

d) Evidencia el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real, es decir, si coordina los Procesos dominio y rango a través de la aplicación de la función f.

e) Construye la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, en donde, a partir de la coordinación de los Procesos dados en d) el estudiante será capaz de determinar los límites laterales y argumentar que el límite de la función no existe porque ambos límites como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes.

Actividad 2

Utiliza la siguiente representación gráfica de f para responder lo que se te pide.



a) Si se elige un intervalo de radio $\varepsilon = 0.4$ centrado en $L = 6$ ¿es posible construir un intervalo centrado en $a = 2.5$ de radio δ, de forma que las imágenes $f(x)$ de los x contenidos en ese intervalo se mantengan dentro del intervalo centrado en L? Argumenta tu respuesta.

b) Apóyate en tu respuesta a la pregunta anterior, deduce si $L = 6$ es el límite de la función f en el valor $a = 2.5$. Argumenta tu respuesta.

a) Muestra un Proceso que le permita concluir que el intervalo solicitado no es posible de crear. Además, de realizar la conversión del registro verbal al gráfico.

b) Ha construido un Proceso al interiorizar que no es posible hallar un valor δ para $\varepsilon = 0.4$ que cumpla con la propiedad métrica.

Actividad 3

Prueba que el $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$, si $f(x) = \begin{cases} x^2, & si\ x \neq 2 \\ 1, & si\ x = 2 \end{cases}$

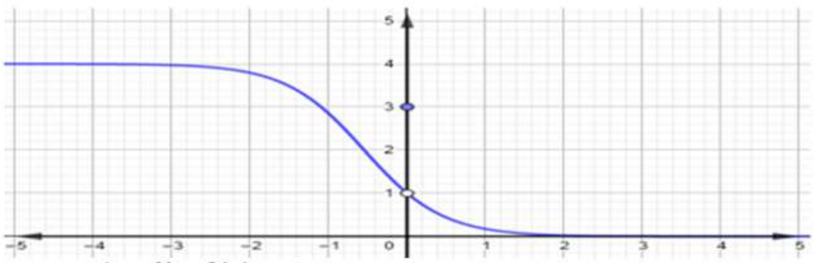
Desencapsula el Objeto límite construido en el registro algebraico y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite, a través del tratamiento analítico de las condiciones requeridas en la definición de límite, a saber:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < |x - a| < \delta\ \ entonces\ |f(x) - L| < \varepsilon$.

Sin embargo, puede que el estudiante responda a partir de los límites laterales, es decir, podrá dar evidencia de ver el Proceso coordinado de aproximación infinita como terminado y manifestar que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

Actividad 4

Considera la gráfica de la función f y determina qué expresiones de límite son correctas y cuáles no, argumenta tus respuestas



a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)\ no\ exite$

En esta actividad, lo que se pretende es evaluar si el estudiante desencapsula el objeto límite de una función en su concepción dinámica en el registro gráfico.

Actividad 5

Una función f se comporta de la siguiente manera cerca del valor $a = 5$ (perteneciente al dominio de la función):

Afirmación 1. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8.

Afirmación 2. A medida que x se aproxima al valor $a = 5$ desde la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4.

Con la información anterior realiza lo que se te pide.

a) Elabora una representación gráfica aproximada para ilustrar el comportamiento de f para valores de x cerca del valor $a = 5$. (Utiliza una función lo más sencilla posible).

b) Escribe las afirmaciones 1 y 2 en forma simbólica.

c) Argumenta si el $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe o no.

a) Realiza una conversión del registro verbal al registro gráfico y reflexiona acerca de la cercanía o proximidad de los valores de x al valor $a = 5$ y de los valores $f(x)$ en el rango.

b) Efectúa una conversión del registro verbal al registro algebraico y muestra el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real.

c) Desencapsula el Objeto de límite construido y revierte los procesos de aproximación y validación del candidato a límite, a través de una serie de enunciados. Además, se espera que evidencie la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, en donde, a partir de la coordinación de los procesos dados determine que cuando x se aproxima a 5 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8, mientras que cuando x se aproxima a 5 por la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4, por lo tanto, el límite no existe.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

En este apartado presentamos el análisis de las respuestas de los estudiantes a las actividades que se les proporcionaron. Para la interpretación de los resultados especificaremos los mecanismos y estructuras que evidenciaron, los tratamientos y conversiones en los registros semióticos que utilizan las actividades seleccionadas, así como las dificultades.

Actividad 1. Registro algebraico-numérico

- *Acción de evaluar la función f en unos puntos, cada punto sucesivo cercano a $x = 1$.*

Todos los estudiantes realizaron la acción de sustituir los elementos del dominio de la función cada vez más cercanos a $x = 1$ en la expresión matemática proporcionada. Esto demuestra Acciones en el registro numérico y conversiones del registro algebraico al registro numérico.

- *Proceso dominio y conversión del registro numérico al gráfico*

Los alumnos al haber realizado Acciones en el dominio de valores cada vez más cercanos a $x = 1$ notaron que los valores de x dados, se aproximan cada vez más al valor de interés $x = 1$. De esta forma se confirma que todos los estudiantes evidenciaron la estructura Proceso en el dominio. Con respecto a la conversión de registros semióticos, todos los estudiantes realizaron la conversión solicitada.

- *Proceso rango*

En este inciso $L1, L2, M1, ED$ centraron su atención en el rango, para notar lo que ocurre con los valores de $f(x)$ cuando se comparan con $f(1)$ y esa reflexión los llevó a construir el Proceso rango, concluyendo que las imágenes de $f(x)$ se aproximan por la izquierda al valor 1 y por la derecha al valor 0.

Sin embargo, *M2* respondió: "$f(x)$ tiene dos aproximaciones, se aproxima al 0 y al 1, los valores que se aproximan al cero, son los que se aproximan a 1 por la derecha, mientras que los valores que se aproximan al 1 son los valores que se aproximan a 0 por la izquierda". Podemos interpretar que trata de relacionar x con $f(x)$, pero al no especificar cuándo habla del dominio y cuándo del rango, muestra que tiene dificultades para construir el Proceso que resulta de la coordinación de los Procesos dominio y rango en el registro verbal.

- *Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real*

Aunque los estudiantes de licenciatura se percataron de que la función se aproximaba a dos diferentes valores, no manifestaron la estructura Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real.

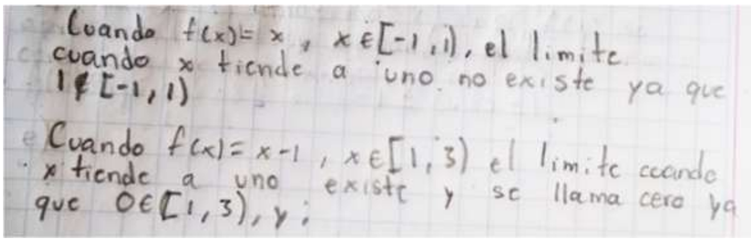


Figura 1: Respuesta de *L1*

Un ejemplo de la falta de este Proceso lo podemos observar en la respuesta de *L1* (Figura 1). Como se puede observar, él trabaja en el registro analítico, pero al analizar cada subintervalo de la función de manera independiente y no coordinada, concluye que la existencia del límite depende de si la función está definida o no en $x = 1$ en cada subintervalo. Por su parte, los estudiantes de posgrado sí mostraron este Proceso.

- *Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite*

Los estudiantes *L1* y *M1* no mostraron la estructura Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, en el registro numérico-algebraico. Se esperaba que a partir de la coordinación de los Procesos dados en d) serían capaces de determinar los límites laterales y argumentar que el límite de la función no existe porque ambos límites, como aproximaciones infinitas terminadas, son diferentes. Los estudiantes *L2, M2 y ED* sí dieron evidencia de esta estructura, como se detalla a continuación.

La respuesta que proporcionó *L1*, fue "$\operatorname{Lim}_{x\to 1}(x-1) = 1 - 1 = 0$". En su solución notamos ciertos errores, uno de ellos fue no analizar lo que ocurre con puntos cercanos al valor de interés, el segundo fue olvidar cómo estaba definida la función, pues esta era a trozos, aunque evaluó de manera correcta, no era toda la regla de correspondencia. *M1* respondió: "Serían dos límites, uno por la izquierda y otro por la derecha". De esta manera, *M1* no proporciona una respuesta a la pregunta solicitada, él ve a los límites laterales como si fueran dos límites de la función, él ha logrado construir los Procesos dominio y rango y en el inciso c) mostró el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real, pero tuvo dificultades para evidenciar la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite.

L2, contestó "No tiene límite, recordemos que el límite es único y debe de encontrarse en el mismo valor tendiendo en ambas direcciones (izquierda y derecha)". Se interpreta que *L2 recuerda* el teorema en el que se afirma que el límite de una función en un punto existe sí y solo si los límites laterales existen y son iguales en ese punto.

M2 respondió que "no existe, ya que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ ya que el límite es único y aquí vemos que tiene dos aproximaciones distintas". El estudiante *ED* contestó "el $\lim_{x\to 1} f(x)$ no existe, ya que por un teorema de cálculo tenemos que el límite de una función existe si y solo sí los límites laterales existen y son iguales y en este caso son diferentes".

Actividad 2. Registro verbal

- *Proceso, al mencionar que no es posible construir el intervalo solicitado y conversión del registro verbal al gráfico.*

En esta pregunta todos los estudiantes se percataron de que no era posible crear el intervalo solicitado, sin embargo, *ED* fue el único en mostrar el Proceso esperado, realizó las conversiones necesarias del registro verbal al gráfico y del gráfico al analítico. Él observa que el intervalo solicitado no era posible de construir respondiendo lo siguiente: "No, ya que dada cualquier $\delta > 0$, en el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ siempre se encuentra el punto $\frac{a+(a+\delta)}{2}$ tal que $L + \varepsilon < f(\frac{a+(a+\delta)}{2})$". Nos percatamos que él da su respuesta en términos de la concepción métrica del límite y deduce que no es posible encontrar el intervalo solicitado.

- *Proceso, al mencionar que el límite no existe*.

En esta pregunta *L1* no dio evidencia de la estructura Proceso, *L2* mostró dificultad con los cuantificadores. Los estudiantes *M1* y *ED* mostraron la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, lo cual les permitió concluir que el límite de esa función no existe. La diferencia que hubo entre *M1* y *ED* fue la notación, ya que *ED* mostró más formalidad, además mostró el Objeto límite de la concepción dinámica. Asimismo, el estudiante *M2* fue el único en evidenciar que el límite no existe utilizando la concepción métrica del concepto de límite. Analizaremos con detalle sus respuestas a continuación.

L1 respondió “Sí, ya que en $a = 2.5$ dicho punto si toca a la función, sí pertenece. Por lo cual el límite sería 6 de acuerdo a como se ve la gráfica”. La respuesta proporcionada por *L1* muestra que tiene dificultad para diferenciar entre el valor de la función y el límite de la función, pues él observa que cuando $a = 2.5$ hay un punto en la gráfica que vale 6 y es al que llama el límite de la función. En la respuesta que dio muestra no haber construido la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite o en su concepción métrica, pues no eligió una medida de proximidad al valor límite *L* a lo largo del eje *Y* ni determinó si hay un intervalo alrededor del valor en el cual uno está conjeturando el límite, tal que el valor de la función está lo suficientemente cerca de *L*.

El estudiante *L2* contestó: “No lo es, si usamos los elementos dados dentro de la definición de límite, no encontramos la δ que satisface, lo cual resulta en la negación de dicha definición”. A partir de su respuesta notamos que tiene dificultades con los cuantificadores, aunque observa que 6 no es el límite de la función, afirma que la negación de la definición de límite contiene la expresión “no encontramos la δ”, pero la correcta es “para toda delta”. De esta manera, *L2* no muestra la construcción del Proceso en la concepción métrica que le permita argumentar que el límite no existe.

El estudiante *M1* respondió “por la gráfica nos damos cuenta que si nos acercamos por la izquierda el límite es 3.8 y si nos acercamos por la derecha el límite es 6.8, por lo tanto, no tiene límite en $a = 2.5$”. *M1* da evidencia de haber construido la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, lo cual le permitió ver que el límite no existe.

El estudiante *M2* contestó lo siguiente: “El límite no existe, debido a que la definición de límite no se cumple, en la parte que menciona para cualquier $\varepsilon > 0$, al no cumplirse esa parte no existe el límite en ese valor”. El estudiante *M2* muestra que ha construido el Proceso en la concepción métrica que le permitió concluir que el límite no existe en $a = 2.5$. Él se apoyó en su respuesta del inciso a) para justificar la no existencia del límite.

La respuesta del estudiante *ED*, fue la siguiente: “No, ya que de la gráfica podemos observar que:

$\lim\limits_{x\to 2.5^+} f(x) = 3.8 \neq \lim\limits_{x\to 2.5^-} f(x) = 6.8$ y como los límites son distintos, el límite de esa función no existe.

Actividad 3. Registro algebraico

- *Desencapsular el Objeto límite y realizar tratamientos en el registro algebraico.*

En este inciso solo los estudiantes *M1* y *ED* dieron evidencia de que lograron desencapsular el objeto de límite.

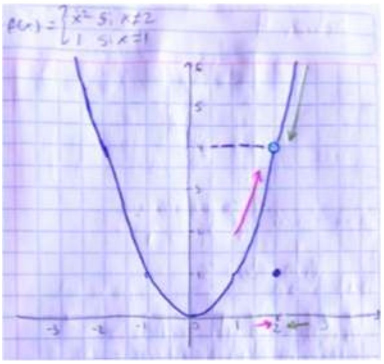


Figura 2: Respuesta del estudiante M1 Actividad 3

El estudiante *M1* tuvo dificultades para responder este inciso utilizando la notación algebraica y realizó una conversión del registro algebraico al gráfico, lo cual se observa en la Figura 2. Con el apoyo de la gráfica respondió, "si $x \to 2$ por la izquierda entonces $f(x) \to 4$, es decir, cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 4 y si $x \to 2$ por la derecha entonces $f(x) \to 4$ entonces de manera intuitiva podemos ver que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$". Mientras que *ED* respondió: "Sea $\varepsilon > 0$ definimos $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{7}, 1\right\} > 0$, si $0 < |x-2| < \delta$ entonces $0 < |x-2| < 1\ y\ 0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{7}$, $-1 < x-2 < 1$ entonces $5 < |x+2| < 7$ entonces $|f(x)-4| = |x^2-4| = |x-2||x+2| < 7|x-2| < \varepsilon$. Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$." Lo anterior muestra que *ED*, logró desencapsular el Objeto límite de la concepción métrica construido en el registro algebraico y revirtió los procesos de aproximación y validación del candidato a límite en términos de desigualdades. Además, realizó los tratamientos necesarios en el registro algebraico con el fin de expandir la información y responder lo solicitado.

Actividad 4: Registro algebraico

- *Desencapsular el Objeto de límite y realizar la conversión del registro algebraico al gráfico.*

En esta actividad, todos los estudiantes realizaron la conversión del registro algebraico al gráfico. Sin embargo, solo *ED* dio evidencias de haber desencapsulado el Objeto de límite, utilizando la concepción métrica de límite para justificar la veracidad de las afirmaciones propuestas y también notó que la función *f* es inyectiva.

ED argumentó sus respuestas de la siguiente manera: “a) El $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no puede ser 3, pues si tomamos $\varepsilon = 0.2, y\ \delta > 0$ tomamos cualquier intervalo de la forma $(-\delta, +\delta)$ con $\delta > 0$, van a existir puntos $a \in (-\delta, +\delta)$ tales que $f(a) \notin (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$, donde $f(a) = \frac{\delta}{2}$. Para el inciso b) respondió: “es cierto, ya que dado cualquier $\varepsilon > 0$ no importa qué tan pequeño sea, nos fijamos en las rectas $y = 1+\varepsilon$ y $y = 1-\varepsilon$, estas rectas intersectan a la gráfica de la función f en un único punto, ya que la gráfica de f es inyectiva (pues las rectas horizontales a la gráfica solo se intersectan en un punto), digamos $f(a)$ para $y = 1+\varepsilon$ y $f(a_1)$ para $y = 1-\varepsilon$, consideremos el mínimo entre a y a_1, es decir, $\delta = \min\{a, a_1\} > 0$, será el que buscamos, y el inciso c) es falso por b).

Actividad 5: Registro verbal

- *Conversión del registro verbal al registro gráfico y Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real*

Los estudiantes *L2, M1* y *ED* realizaron la conversión del registro verbal al gráfico. En la Figura 3 observamos un ejemplo de cómo respondieron estos estudiantes. Cabe mencionar que las gráficas que realizaron todos los estudiantes fueron de funciones lineales.

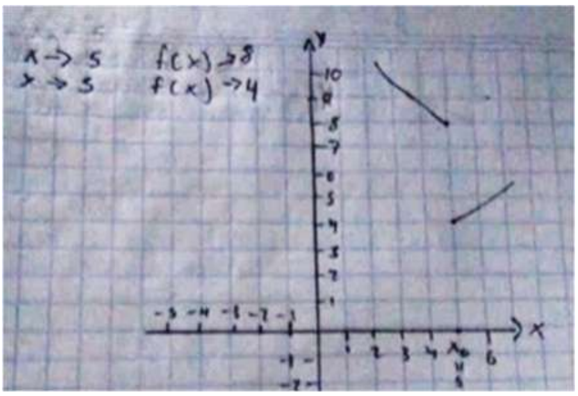


Figura 3: Respuesta del estudiante L1 Actividad 5

- *Conversión del registro verbal al registro algebraico y Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real*

Todos los estudiantes lograron hacer conversión del registro verbal al registro algebraico y evidenciar el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real. La respuesta proporcionada fue “$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 8$ y $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 4$”.

- *Desencapsular el Objeto de límite*

A diferencia de las otras actividades, en esta, el registro verbal favoreció a todos los estudiantes para desencapsular el Objeto de límite, pues evidenciaron la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, en donde, a partir de la coordinación de los Procesos dados determinaron que, cuando x se aproxima a 5 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima al valor 8, mientras que cuando x se aproxima a 5 por la derecha, $f(x)$ se aproxima al valor 4 por lo tanto, el límite no existe.

CONCLUSIONES

En este trabajo se analizó la comprensión del concepto de límite de una función real de cinco estudiantes de matemáticas de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla que cursaban diferentes etapas de los programas de licenciatura y posgrado en matemáticas. Para la interpretación y análisis de los datos se emplearon las teorías APOE y de Registros de Representación Semiótica. Se exploró cómo cambian las estructuras mentales que utilizan estudiantes en diferentes etapas académicas de la carrera de matemáticas cuando se enfrentan a actividades relacionadas con el límite de una función que involucran a diferentes registros semióticos. También se propuso identificar si hay dificultades que prevalecen a lo largo de la formación matemática relacionadas con este concepto.

A partir del análisis de las respuestas se reportó que todos los participantes mostraron Acciones del límite de una función y los Procesos dominio y rango de la concepción dinámica en todos los registros semióticos que se utilizaron. En cuanto al Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real, los estudiantes de posgrado dieron evidencia de él en el registro algebraico-numérico, mientras que los alumnos de licenciatura no lo evidenciaron y en su lugar, mencionaron otras características de la función. A diferencia del registro anterior, todos los informantes evidenciaron el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real en el registro verbal, lo cual muestra la influencia que puede llegar a tener un registro semiótico. Lo anterior coincide con Pons (2014) y Fernández et al. (2018), quienes concluyeron esto pero en estudiantes de bachillerato y en profesores en formación.

En relación con la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite, los alumnos de posgrado sí la evidenciaron. El Objeto de la concepción dinámica se observó que está en proceso de construcción en los estudiantes de licenciatura y maestría, pues dieron evidencias de este en la actividad 5, que está en el registro verbal, pero en los demás registros no todos lo mostraron.

A manera de síntesis, se conjetura una posible evolución de la comprensión del límite de una función en los diferentes niveles de estudio considerados con las características siguientes.

Primera mitad de la licenciatura: Uso de las estructuras Acción y de los Procesos dominio y rango de la concepción dinámica del límite de una función pero no del Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real. También, se evidenciaron dificultades al realizar transformaciones semióticas.

Segunda mitad de la licenciatura: Uso de las estructuras Acción, los Procesos dominio y rango y la coordinación de estos en algunos registros semióticos. Sin embargo, hubo dificultades con los cuantificadores al intentar usar la definición formal, al desencapsular el Objeto límite y al realizar tratamientos en el registro algebraico.

Primer año de maestría: Uso de las estructuras Acción, de los Procesos dominio y rango, así como del Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real en todos los registros semióticos evaluados. Además, aparecieron indicios de la Totalidad del proceso infinito en la concepción dinámica del límite. Sin embargo, en los intentos de usar la definición formal de límite con épsilon y delta, se presentaron dificultades con la negación de los cuantificadores.

Segundo año de maestría: similar al del primer año de maestría, pero con dificultades en la conversión del registro verbal al gráfico.

Doctorado: se apreciaron todas las estructuras y transformaciones semióticas requeridas en las actividades, así como un uso correcto de los cuantificadores y un vocabulario matemático preciso y formal.

Así, en este estudio se mostraron dificultades en la construcción de la concepción dinámica del límite de una función real en los estudiantes de una licenciatura en matemáticas. Como consecuencia, estos estudiantes también tuvieron dificultades en las actividades relacionadas con la concepción métrica del límite de una función real. Los estudiantes de maestría y doctorado mostraron pleno dominio de la concepción dinámica en todos los registros semióticos, pero tuvieron dificultades en la concepción métrica. Finalmente, ambas concepciones se manifestaron de manera precisa y en todos los registros semióticos, solo en el estudiante de doctorado.

Derivado de lo anterior, algunas recomendaciones para los docentes son: trabajar el límite con las distintas representaciones semióticas de la función, así como con actividades que promuevan la construcción del Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real; fomentar el uso de cuantificadores y su negación, así como la construcción de la estructura Proceso con el uso de la métrica que lleve a la comprensión de la definición formal del límite de una función.

De acuerdo con la teoría APOE, los estudiantes alcanzarán una construcción del límite si tienen la oportunidad de construir las Acciones, los Procesos dominio y rango, el Proceso de la concepción dinámica del límite de una función real y este lo encapsulan en el Objeto Límite de una función en un punto. En Morante (2020) se puede conocer una secuencia de 25 actividades basadas en esta teoría y los resultados alentadores de su aplicación a un grupo de nivel superior (ingeniería). Está pendiente poner a prueba esta secuencia en estudiantes de Matemáticas, pues los informantes de este estudio no aprendieron este concepto con un diseño didáctico basado en la teoría APOE.

REFERENCIAS

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, 4(3), 219-236.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, Francia, 5, 37-65. https://shorturl.at/JBOqT

Fernández, C., Sánchez, G., Moreno, M. y Callejo L. (2018). La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas,* 36(1), 143-62. https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/335278

Hernández Rebollar, L. A., Trigueros Gaisman, M., Ruiz Estrada, H., y Juárez Ruiz, E. (2023). La concepción dinámica del límite de una función desde APOE y los registros semióticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(2), 117–135. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5796

Medina M., A. C. (2001). Concepciones Históricas Asociadas Al Concepto De Límite E Implicaciones Didácticas. *TED: Tecné, Episteme y Didaxis*, 9. https://doi.org/10.17227/ted.num9-5622

Molfino, V y Buendía G. (2010). El límite de funciones en la escuela: un análisis de institucionalización. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 5(1), 27-4. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=273319425002

Morante, J. (2020). *Una secuencia didáctica para la construcción de la definición formal del límite de una función basada en teoría APOE* (Tesis de maestría). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de Bachillerato del concepto de límite de una función en un punto* (Tesis de Doctorado) Universidad de Alicante, España. http://hdl.handle.net/10045/45713

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM, 40*, 165-178.

Swinyard, C. y Larsen, S. (2012). Coming to Understand the Formal Definition of Limit: Insights Gained From Engaging Students in Reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 465. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.43.4.0465

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2019). Task Design in APOS Theory. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43-55.

Usman, Juniati, D., Siswono y T. Y. E. (2017). Differences conception prospective students teacher about limit of function based gender. *AIP Conference Proceedings*, 1867(1–7). https://doi.org/10.1063/1.4994406