

Recebido: 1-03-2019 | Aprovado: 25-09-2020

Aula de Mecânica
Alguns aspetos importantes da modelação de um veículo:
suspensões e pneus

Mechanics Class
Some important aspects of vehicle modeling:
suspensions and tires

Emanuel Eduardo Pires Vaz, Universidade do Porto, NYAS, Portugal (eepv@yahoo.com)

Resumo: O estudo de um banco e de um pneu para o mercado de veículos, visa uma aula de mecânica para os cursos de automóveis da FEUP e do ISEP. Outros aspetos importantes, tendo em conta o terreno, são aqui interpretados num veículo militar simples.

São apresentados dois problemas: o primeiro sobre as funcionalidades do assento, através do estudo mecânico feito por dualidade elétrica; e o segundo através do estudo das cordas das telas metálicas dos pneus.

Palavras-Chave: pneu, suspensão, tela

Abstract: The study of seats, and tires for the vehicle market aims at a mechanics class for the FEUP and ISEP car courses. Other important aspects, taking into account the ground, are interpreted here in a simple military vehicle.

Two problems are presented: the first on the seat functionalities, through the mechanical study done by electrical duality; and the second through the study of the ropes of the tire wire screens.

Keywords: ply, suspension, tire

Introdução.

No veículo militar do nosso estudo exploraram-se essencialmente as suspensões e os pneus sendo estes objetos de uma consideração mais abrangente que não diminui a eficácia da exposição.

Há um ângulo entre a direção em que a roda é comandada e aquela em que a roda viaja. Chama-se “side-slipe angle”. O raio de viragem depende não só da geometria do volante, mas também das propriedades dos pneus. Se se trata de tração a todas as rodas o estudo das suspensões pode ser modelado de acordo com a figura 1. Vamos usar a dualidade eletricidade–mecânica nas formulações certas e as mesmas fórmulas e equações diferenciais da eletricidade. O cálculo fica a interessar a todos. Ler, por exemplo, “Uma introdução à análise de sistemas lineares” (Barczak, 1977, p.90-92). Constitui, aqui, objeto de problemas de aplicação nos cursos de engenharia, na FEUP e no ISEP. Este trabalho assenta no carro militar mais simples: um *unimog*, fig. 10. O estudo é feito na subida e em escalões, de acordo com Rensburg (2006) para questão dos cálculos.

Os dois problemas a titular que se seguem, tratam-se, o primeiro no curriculum de mestrado do ISEP e o segundo com solução completa no livro *Reparações de Eletrodomésticos* (Vaz, 1987). O estudo do pneu com telas de aço poderá ser completado por outros meios; no livro citado aparece a solução completa. Haja quem o volte a estudar até com formulações que não tenham ocorrido aqui.



Fig. 1 - Suspensão para um veículo militar de oito rodas e modelo de assento para exemplo de cálculo por dualidade a partir do modelo elétrico na perspetiva de um engenheiro.

Primeiro problema a titular¹.

Funcionalidades do assento do *unimog*: estudo mecânico feito por dualidade elétrica:

Aqui o efeito das oscilações da suspensão no banco do veículo militar é semelhante ao de um Kart. Para se fazer o respetivo estudo considera-se uma mola equivalente

¹ Aplicação de uma aula teórica prática no ISEP.

de coeficiente igual à soma das das molas paralelas colocada na secção reta média do banco.

Considere-se como valores os seguintes que foram inicialmente postos como escolha para um Kart à disposição dos laboratórios universitários: $F(t) = 6 \sin(8t)$, $IG = 0,2 \text{ kg/m}^2$, $c = 100 \text{ N/m}$, $K = 200 \text{ N/m}$, $a = 31,4 \text{ cm}$, $l = 20 \text{ cm}$.

Aqui a é a distância da dobra do banco a cada sistema concentrado quer de molas quer de amortecedores, e é a espessura do banco e $F(t)$ é a força oscilatória que obriga o banco a fletir, por exemplo por ação de uma corrente de ar ou simples abalo accidental.

Pela ação da força $F(t)$ o banco rodará de um ângulo θ , que vamos calcular. Usaremos aqui o formalismo de Lagrange, para estes problemas:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = \Psi$$

Onde T é a energia cinética total do movimento, aqui apenas a devida à rotação; c é o amortecimento e V a energia elástica, sendo Ψ o somatório das forças e momentos exteriores. Tem-se, então: $T = \frac{1}{2} I_0 \dot{\theta}^2$

Pelo Teorema de Steiner temos $I_0 = I_G + m d^2$ em que d é a distância entre o centro de massa G , e O . Com um sistema de eixos passando por O , o eixo vertical, y , e o horizontal, x , tem-se: $m_1 = \text{massa das costas do banco}$:

$al = m_1 \cdot m_2 = \text{massa do assento do banco}$:
 $2al = m_2 \cdot l = \text{espessura do banco}$. As coordenadas do centro de massa do banco são:

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad y_G = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \quad x_G = \frac{al x_1 + al x_2}{al + 2al} \quad y_G = \frac{al y_1 + al y_2}{al + 2al}$$

Simplificando e substituindo $x_1 = \frac{l}{2}$, $x_2 = a$, $y_1 = \frac{a}{2}$, $y_2 = \frac{l}{2}$,

vem após simplificação: $x_G = \frac{l+a}{3}$; $y_G = \frac{l+a}{3}$; $x_G = 0,1380$; $y_G = 0,0857 \Rightarrow G = (0,1380; 0,0857) [m]$. A distância d à origem é:

$$d = \sqrt{0,1380^2 + 0,0857^2} = 0,1622 \text{ m} . \text{ Então:}$$

$$I_0 = 0,2 + 67 \times 0,1622^2 = 1,9627$$

Para um assento de largura $0,60 \text{ m}$, tem-se, com uma densidade média de $0,6$: $\text{Peso} = 0,6 \times 0,6 \times (al + 2al) = 0,0670 \text{ kpg}$. A massa do espécimen em estudo será pois: $m = 0,0670 \text{ t} = 67 \text{ kg}$.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 I_0 \ddot{\theta} ; \quad c = \frac{1}{2} c \dot{s}^2 = \frac{1}{2} c a^2 \dot{\theta}^2 ; \quad \frac{\partial c}{\partial \dot{\theta}} = c a^2 \dot{\theta} ;$$

$$V = \frac{1}{2} k s^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 2 I_0 \ddot{\theta} ;$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k s_1^2 + \frac{1}{2} k s_2^2 = \frac{1}{2} k \times 4 a^2 \theta + \frac{1}{2} k a^2 \theta^2$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \theta a^2 (4k + k) = 5 a^2 \theta .$$

Substituindo os valores, na equação acima vem: $I_0 \ddot{\theta} + a^2 \dot{\theta} + 5 a^2 \theta = 2 a F(t)$

$$\Leftrightarrow 1,9627 \ddot{\theta} + 9,8596 \dot{\theta} + 0,4930 \theta = 3,7680 \sin(8t) .$$

Esta é uma equação do tipo: $m \ddot{\theta} + C \dot{\theta} + k \theta = 3,7680 \sin(8t)$

A matemática ensina que a solução é da forma:

$$\theta(t) = \theta(\omega) \sin(8t - \varphi)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= \frac{F/K}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \beta \zeta)^2}} \\ &= \frac{3,7680/0,4930}{\sqrt{(1 - 15,962^2)^2 + (2 \times 5,0115 \times 15,962)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(\omega) &= 0,0255 \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0,4930}{1,9627}} = 0,5012 \text{ rad /s} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \\ \frac{8}{0,5012} &= 15,962 \end{aligned}$$

$$\zeta = \frac{C}{C_c} = \frac{C}{2 m \omega_n} = \frac{9,8596}{2 \times 1,9627 \times 0,5012} = 5,0115$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{k - m \omega^2}{C \omega} = \frac{0,4930 - 1,9627 \times 8^2}{9,8596 \times 8} = -1,5863 \text{ rad} \quad \Leftrightarrow \varphi = -57,73^\circ$$

$$\theta(t) = 0,0255 \sin(8t + 57,73^\circ) .$$

Pode-se concluir que se os materiais e dimensões forem convenientemente escolhidos se pode ter um ângulo $\theta(t)$ de muito pequena amplitude. Doutra modo dizendo: as influências exteriores, aqui, do ar, tornam-se insignificantes no equilíbrio do banco projetado.

Segundo problema a titular: estudo das cordas metálicas de um pneu.

Esta introdução ao estudo das cordas das telas metálicas dos pneus é um problema que interessa à engenharia de pneus. A respetiva figura mostra algumas cordas de telas metálicas elasticamente acopladas.

Segue-se de perto o trabalho de Zudans (1965). O seu raciocínio sobre elasticidade pode ser usado aqui mediante certos arranjos. Faz-se referência a McConnell (1964) e Cook, (1963) que trataram este problema nas suas teses doutorais e desenvolveram a teoria em artigos importantes. Se não houver qualquer força interna a ser exercida, tem-se:

$$\delta \left(\int_V W dV - \int_S T_i u_i dS \right) = 0$$

Onde \mathbf{W} é a energia por unidade de volume da estrutura, e o primeiro integral está estendido ao volume \mathbf{V} do sistema e o segundo a \mathbf{S} , a superfície do sistema.

Ao considerar os conceitos para a teoria das placas curvas finas (Boley & Weiner, 1960), tem-se que a variação da densidade de energia é expressa por:

$$\begin{aligned} \delta U_p &= \frac{2 \pi E h}{1 - \nu^2} \left\{ \left[\frac{du}{dr} + \frac{\partial u}{\partial r} - (1 + \nu) \alpha T_0 \right] r \delta u \right\}_a^b \\ &- \frac{2 \pi E h}{-1 - \nu^2} \int_a^b \left[\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} - (1 + \nu) \alpha \frac{dT_0}{dr} \right] r \delta u dr \\ &+ 2 \pi D \left\{ \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} + (1 + \nu) \alpha r \right] r \delta \left(\frac{dw}{dr} \right) \right\}_a^b \\ &- 2 \pi D \left\{ \left[\frac{d}{dr} (\nabla^2 w + (1 + \nu) \alpha r) \right] r \delta w \right\}_a^b \\ &+ 2 \pi D \int_a^b [\nabla^4 w + (1 + \nu) \alpha \nabla^2 r] r \delta w dr \end{aligned}$$

$$\text{Onde: } D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad r = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z T dz; \quad T_0 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T dz$$

O trabalho das forças externas que atuam nas deslocações virtuais é dado por:

$$\int_{SP} T_i u_i dS = \int_0^{2\pi} \int_a^b p w r dr d\theta + \{2 \pi r q w\}_a^b - \left\{ 2 \pi r m_r \frac{dw}{dr} \right\}_a^b + \{2 \pi r n_r u\}_a^b$$

A energia elástica devida às flexões entre as cordas metálicas 1 e 2 é dada por:

$$\int_{V_{12}} w'_{12} dV = \frac{1}{2} (m_1 \theta_1^* + m_2 \theta_2^* + n_1 \bar{u}_1 + n_2 \bar{u}_2)$$

$$\text{e } \int_{V_{20}} w'_{20} dV = \frac{1}{2} (m_0 \theta_2^* + n_0 u_2^*)$$

As forças e os momentos que figuram nas duas últimas equações podem ser expressas pelas funções lineares de $\theta_1, \theta_2, \bar{u}_1, \bar{u}_2$.

$$m_1 = \bar{C}_{11} \theta_1^* + \bar{C}_{12} \theta_2^* + \bar{C}_{13} \bar{u}_1 + \bar{C}_{14} \bar{u}_2 \quad ; \quad m_2 = \bar{C}_{21} \theta_1^* + \bar{C}_{22} \theta_2^* + \bar{C}_{23} \bar{u}_1 + \bar{C}_{24} \bar{u}_2$$

$$n_1 = \bar{C}_{31} \theta_1^* + \bar{C}_{32} \theta_2^* + \bar{C}_{33} \bar{u}_1 + \bar{C}_{34} \bar{u}_2 \quad ; \quad n_2 = \bar{C}_{41} \theta_1^* + \bar{C}_{42} \theta_2^* + \bar{C}_{43} \bar{u}_1 + \bar{C}_{44} \bar{u}_2 \quad m_0 = \bar{f}_{11} \theta_2^* + \bar{f}_{12} \theta_2^* \quad ; \quad n_0 = \bar{f}_{21} \theta_2^* + \bar{f}_{22} \theta_2^*$$

Onde as matrizes $[\bar{C}_{ij}]$ e $[\bar{f}_{ij}]$ são simétricas e podem ser avaliadas pela teoria da flexão, com ou sem qualquer consideração de forças e de deformações tendo valores constantes. As expressões para as resultantes das tensões considerando-as não-lineares devidas a distribuição axial de temperatura são computadas diretamente de:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[u_{,rr} Z W_{,rr} + \frac{\nu}{r} (u - Z W_{,r}) - (1+\nu) \alpha T \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1}{r} (u - Z W_{,r}) + \nu (u_{,r} - Z W_{,rr}) - (1+\nu) \alpha T \right]$$

Esta é uma solução exata (Vaz, 1987), contudo é bom integrar por computador. Ver no livro mencionado as notações, quando houver qualquer dificuldade. Arranjem-se outras soluções: as que daqui se deprenderam foram testadas e resultaram. Esta solução fora encontrada após uma adaptação a este problema, de outro mais geral de estruturas nucleares, às portas de Pyongyang².

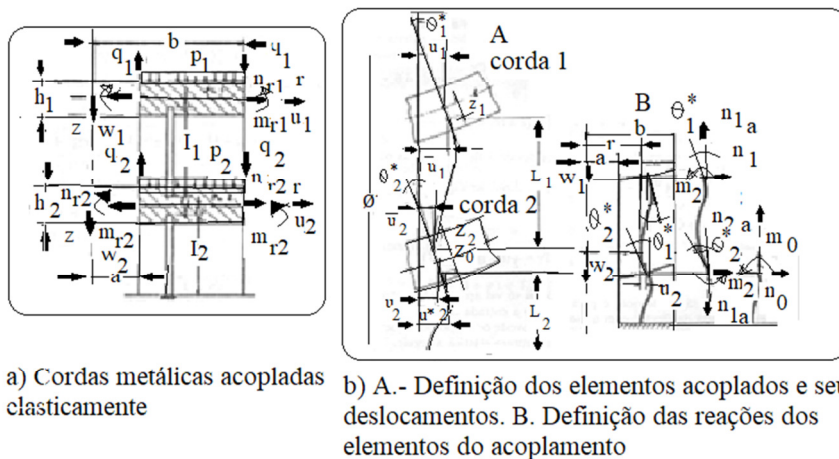


Fig. 2 – Esquema de um traçado de cordas metálicas para pneus, segundo o autor.

No que se segue, tecem-se algumas considerações sobre aspetos da modelação de um veículo militar – o *unimog* (fig. 10) – pensadas para as aulas práticas dos alunos

² Inspiração para este problema. Ver “O Desafio-Final”- O Irra de Deus (no prelo), edição do autor.

de engenharia mecânica do ISEP e da FEUP, fazendo o estudo dual por processos elétricos.

Estudo de um pneu. Construção do pneu de um veículo automóvel: as figuras 3 e 4 mostram cortes num pneu; aí se veem as suas partes constituintes e os nomes em língua inglesa, tal como usam os técnicos nas nossas fábricas.

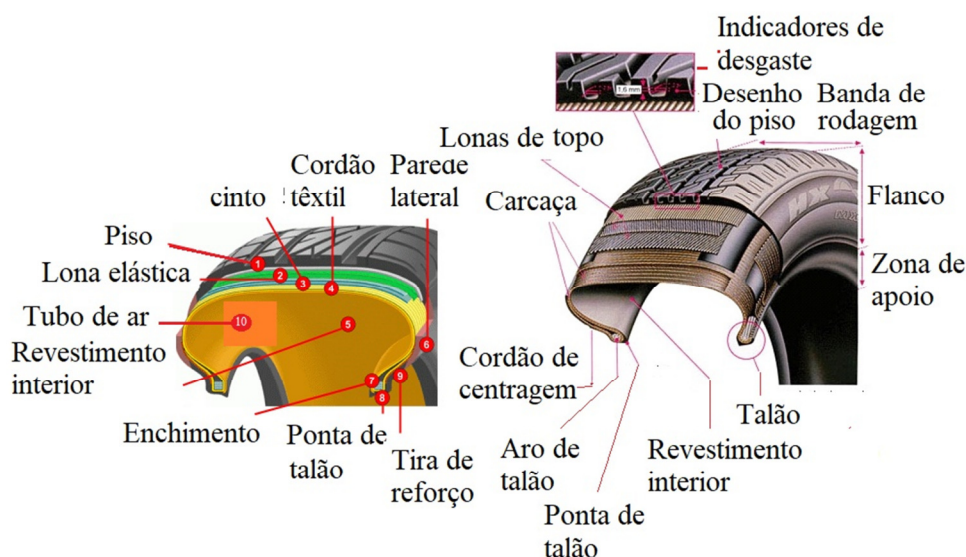


Fig. 3 – Construção de um pneu.

Estrutura mecânica de um pneu. Toro elástico composto de:

- Carcaça flexível composta de borracha reforçada por telas com fibras de alto módulo de resistência à tração;
- Talões em cabos de aço acolchoados à jante da roda;
- Piso, para usar em contacto com a rua cujo desenho permite o escoamento de água e o arrefecimento.

A pressão interna devida ao enchimento com ar:

- Mete a estrutura em pré - compressão de modo que toda a deformação da estrutura mete esta em estado de contração permitindo as forças de reação;

Há dois tipos base de construção de pneus, conforme se mostra na figura 2;

- Pneu radial (radial tire);
- Pneu diagonal (bias-ply tire).

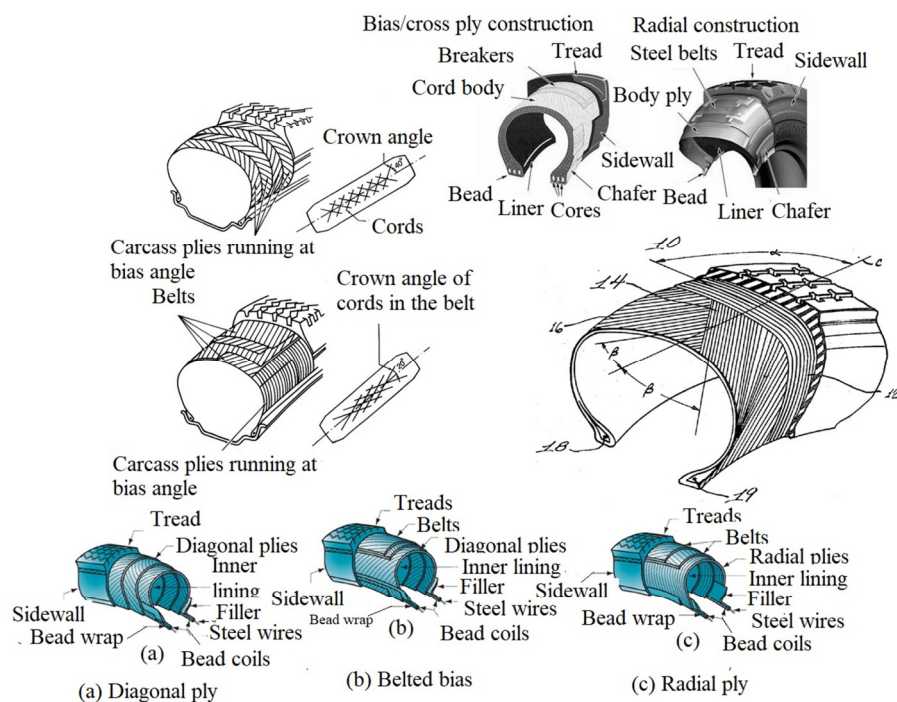


Fig. 4 – Tipos de construções de pneus.

No pneu de carcaça radial:

- A carcaça é feita com telas paralelas de tecido de borracha reforçadas por fios de nylon, de rayon, de poliéster ou de fibra de vidro, correndo de um talão ao outro com um ângulo mínimo próximo de 90° em relação à direção circunferencial.
- Flanco extremamente maleável procurando uma suspensão maleável mas incapaz de assegurar um controlo direcional.
- Uma cintura rígida de tecidos ou de arames de aço correndo em volta da circunferência do pneu entre a carcaça e o piso do pneu. O ângulo normal dos fios nas cinturas tem o valor por volta de 20° em relação ao piso.
- As cinturas asseguram o controlo direcional. A cintura estabiliza o piso tornando-o plano sobre a rua mau grado a deflexão lateral do pneu.
- A maior parte dos pneus para veículos de turismo têm geralmente duas telas sobre os flancos e uma ou duas cinturas de arames de aço ou antes duas a seis cinturas em tecido.

No pneu de carcaça diagonal:

- A carcaça é feita com um número par de duas ou mais telas alternadas, ligadas de um talão ao outro com as fibras fazendo um ângulo de 35° a 40° com a direção circunferencial.

- O ângulo das telas resulta de um compromisso: os ângulos elevados, próximo dos 90°, dão maleabilidade e conforto de conduzir, enquanto que os valores de ângulo pequenos, próximo dos 0°, são melhores para o controlo direcional.
- Mesmo que as carcaças diagonais sejam mais raras que as carcaças radiais, ao curso de uma viragem, o piso da carcaça diagonal pode torcer-se, dando muita carga sobre o flanco exterior na viragem.
- A carcaça diagonal causa uma maior distorção do ar de contacto. A forma toroidal torna-se plana deixando o piso torcido.

Código de dimensões e de carga dos pneus:

Exemplo: 195 / 60 R 15 91V;

Largura 195 mm; **aspect ratio** 60%; ou seja, **altura do flanco** = $195 \times 0,60 = 117 \text{ mm}$; R= radial; diâmetro da jante 15 polegadas;

Índice de velocidade $V = 240 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, 615 kg à velocidade Máxima; Diâmetro exterior: $15 \times 25,4 + 2 \times 117 = 615 \text{ mm}$; ($R = 307,5 \text{ mm}$).

Código de dimensões e de carga das rodas. Caraterizados por:

- Diâmetro da jante (em libras-polegadas);
- Largura;
- Detalhes de normalização;
- Exemplo: 61 / 2J × 14

Largura 6,5 libras; J = tipo; diâmetro da jante = 14 libras.



Fig. 5 – O piso.

O desenho do piso é fundamental nas características de condução. Veja-se a Fig. 3. Só quem trabalha numa fábrica de pneus se apercebe do problema pelos ensaios.

Raios do pneu: Distingamos os raios importantes no pneu:

- Raio “não carregado” R_u : o raio do pneu rígido, sem deformação, cheio de ar à pressão normal de enchimento;
- O raio “carregado” R_i : medido pela distância entre o centro de ar de contacto do pneu ao centro da roda no plano da roda;
- O “raio efetivo de rolamento” R_e : o raio obtido como a razão da velocidade linear na direção x à velocidade de rotação angular.

A figura 6 ilustra os raios do pneu:

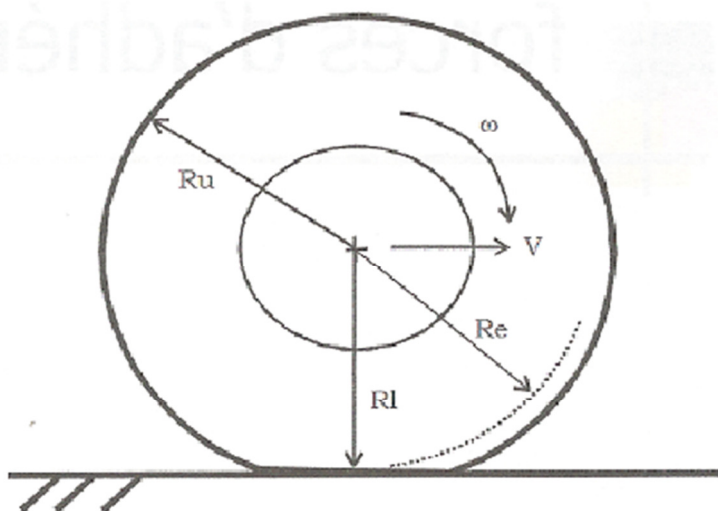


Fig. 6 – Raios do pneu.

Revejam-se algumas fórmulas da teoria de modo a se fazerem os cálculos das forças atuantes num veículo, onde não se fizer a redução ficará como indicação. O peso (W) do veículo atua na direção do eixo dos ZZ . Se for M a massa do veículo carregado, tem-se:

$$\begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Mg \sin \theta \\ Mg \sin \theta \cos \theta \\ Mg \cos \theta \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Força de tração do veículo: O binário de torção do veículo é uma função da velocidade do veículo e da posição da borboleta na válvula de admissão de ar. A velocidade do veículo pode calcular-se com a embraiagem a fundo como:

$$\eta_e = \frac{v_x \epsilon_0}{R_e (1 - i)}$$

Sendo i o deslizamento da caixa de velocidades medida, normalmente entre 20% e 50 %; ϵ_0 é a relação da redução na caixa entre a saída da embraiagem ou conversor

de momento binário e o eixo da roda. A força trativa da máquina pode ser determinada por:

$$F_e = \frac{T_e C_{tr} \epsilon_0 \eta_0}{R_L}$$

onde T_e é o binário tursor disponível para a dinâmica do veículo, η_0 a eficiência da caixa de velocidades e do eixo de comando, cerca de 90% e C_{tr} a relação do binário tursor do conversor e da embraiagem, ver ref.12, [Wong, 2001]. A força de travagem F_b deve ser computada antes do veículo começar a deslizar como:

$$F_b = \frac{T_b - \sum I \alpha_{an}}{R_e}$$

com T_b o momento de travagem, I a inércia de rotação ligada à roda sendo desacelerada e α_{an} a correspondente desaceleração angular.

Uma das maiores forças resistentes do veículo é a de rolamento. Segundo Wrong (2001) é:

$$F_r = f_r W_z$$

$$F_r = W_z (c + p \tan \phi) = W_z c + W_z p \tan \phi$$

onde f_r é o coeficiente de resistência de rolamento, que depende da natureza do piso, terreno, e da velocidade, W_z é a força normal, c é a coesão aparente, e ϕ o ângulo de resistência ao cisalhamento interno do terreno, e p é a pressão.

A resistência aerodinâmica F_a é gerada pelo fluxo de ar contra o corpo do veículo. De acordo com Vaz (no prelo) ou num comum livro de texto sobre aerodinâmicas encontra-se que:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho V^2 C_D A$$

onde C_D é o coeficiente de resistência aerodinâmica determinado experimentalmente pelo fabricante; A é a área frontal do veículo; ρ é a massa específica do ar e V é a velocidade relativa do veículo relativamente à do vento.

Mecanismo de geração de forças nos pneus: Atender à figura 5. Contrariamente a numerosos pares de materiais o coeficiente de fricção da borracha é dependente da superfície de contacto por causa do seu carácter viscoelástico. O material viscoelástico caracteriza-se por uma força de descarga inferior àquela que necessita para a sua carga. Mesmo se a superfície for lubrificada, há ainda a possibilidade de ter uma força de fricção porque há forças de contacto diferentes sobre as superfícies inclinadas das asperezas que causam a histerese (viscoelasticidade) da borracha.

Adesão da superfície do solo:

- Ligações intermoleculares, forças de Van der Waals, entre a borracha e a superfície da estrada;
- O maior dos fenómenos sobre a estrada seca, mas reduzindo substancialmente na rua molhada, de onde perde no coeficiente de fricção sobre a estrada molhada;
- A energia libertada desde a formação das ligações não é importante, mas a rutura das ligações intramoleculares pede energia de onde uma resistência ao rolamento e disso derivada.

Corolários do mecanismo de geração de forças nos pneus:

- O coeficiente de fricção não depende da escala de asperezas, mas antes da sua inclinação de modo que o coeficiente de fricção aumenta com a rugosidade e o ângulo das asperezas;
- Pouco afetado pela presença de água, de modo que uma boa atração é realizada com as borrachas tendo uma histerese importante no piso;
- Acrescendo a pressão vertical aumenta o contacto entre a borracha e a estrada, mas de modo não linear, sempre inferior à linearidade;

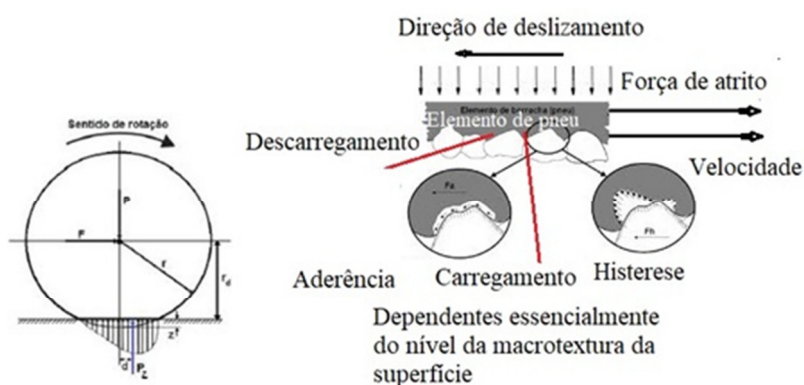


Fig. 7 – Mecanismo de geração de forças nos pneus.

- Isto vai acrescer a força de fricção, mas o coeficiente de fricção vai diminuir, tipicamente em proporção com a potência de $-0,15$ da pressão média;
- Desde que o coeficiente de escorregamento local se fizer notar, uma parte da borracha em contacto com o solo escorrega sobre a estrada, mas este fenómeno não é preponderante no mecanismo de aderência;
- Os dois fenómenos anteriores dependem numa taxa moderada do escorregamento na interface entre a estrada e o pneu;
- O “trepar” (problema dos escalonamentos) é um fenómeno que aumenta as forças, só por si, sobre os pneus. A figura 10 dá um esquema que preside ao nosso estudo.

O cálculo das forças na roda num terreno rugoso pode pressupor um bom estudo como na tese de Rensburg (2006). Atenção à figura 9.

Considere-se o veículo militar da figura 9. Para transformar o problema num, a duas dimensões, precisa-se de encontrar a coordenada em relação a um referencial terrestre de outro vértice no solo no plano da roda. Tomemos o ponto $R_{\omega i b} = R_{u i} + B^T(0; 0; 0,1)^T$ e calcule-se a distância ao solo na direção R_i , e determine-se ainda a coordenada no referencial terrestre $G_{i b}$ daquele ponto como para G_i . O problema fica então simplificado como mostra a figura 10. O ângulo α pode ser determinado usando a regra do cosseno:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{|R_{\omega i} - G_i|^2 + |G_i b - G_i|^2 - |R_{\omega i} - G_i b|^2}{2|R_{\omega i} - G_i||G_i b - G_i|}\right).$$

O ponto mais chegado do contacto será na perpendicular entre $R_{\omega i}$ e a linha $l_{G i}$. Isso é $k_{G \min} = k_i \sin \alpha$. Isto equivale à compressão da roda de $R_u - k_{G \min}$. Como se assume a roda ser atuada por uma força na mesma direção da suspensão, esta compressão dará a mesma força que se estimássemos $z_{ui} - u_i$ por $z_{ui} - u_i = (R_u - k_{G \min}) \sin \alpha$. Referindo a tese de doutoramento de Rensburg (2006, p.97) apresentamos as expressões de cálculo para a força de travagem total:

$$F_{total \text{ Braking}} = -m_{veículo} \frac{u^2}{2s_{graph}(u)} - m_{veículo} g \cdot \sin \alpha$$

e deixa-se ao cuidado dos interessados a leitura para aprofundar o estudo que principiámos aqui. Desde que um pneu role com velocidade constante, constata-se igualmente que é preciso desenvolver um binário para manter a velocidade constante, é o fenómeno da “resistência ao avanço”.

- **Primeira causa:** histerese dos materiais viscoelásticos do pneumático desde a deformação da carcaça ao curso do rolamento.
- **Outras causas:** Fricções dos escorregamentos
- Circulação de ar.
- Efeito de ventilação do pneu que rola: exemplo: a $130 \frac{km}{h}$
90 – 95% de histerese; 2 – 10% de fricção; 1,5 – 3,5 % de resistência de ar
- Para um pneu que rola livremente, é necessário aplicar um binário motor para contrabalançar o momento resistente que provém do deslocamento do centro de pressão.
- O coeficiente de resistência ao rolamento, que é a razão entre a força de resistência ao rolamento e a força normal, engloba todas as propriedades e os fenómenos físicos complicados e acoplados que existem entre o pneu e o solo.

$$F_x = f F_z.$$

A figura 6 mostra a origem mecânica da força de resistência ao avanço³.

³ Ver, por exemplo, Duysink (2013).

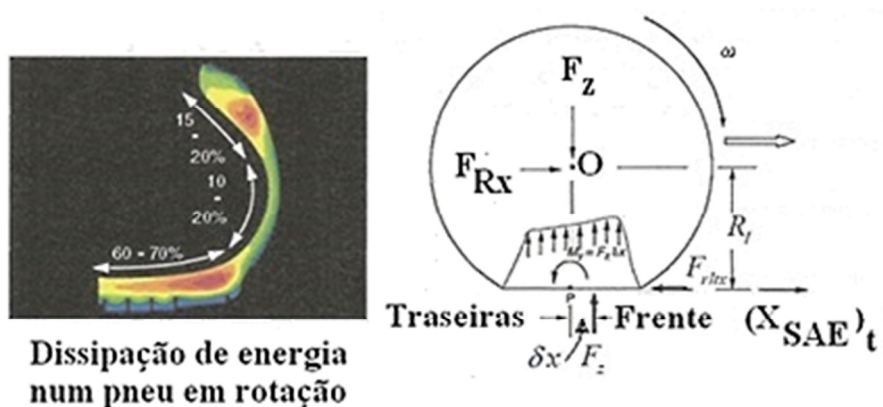


Fig. 8 – Origem mecânica da dissipação de energia num pneu em rotação.

- A geração de calor inerente ao fenómeno de histerese provoca: elevação de temperatura; diminuição da resistência de abrasão e de fadiga na flexão do material do pneu;
- A resistência ao rolamento é afetada pela estrutura do pneu: a dos pneus radiais é geralmente menor que a dos pneus de carcaça diagonal. Aquela diminui também com a pressão de enchimento de ar. É também afetada pela velocidade e pelo deslize longitudinal. É muito mais baixa para as superfícies duras.
- O aparecimento de vibrações e de ondas de deformação estacionárias acima de uma velocidade arrasta perdas de energia suplementares.
- As forças longitudinais devidas ao binário motor forçando a tração deslocam a zona de contacto para a frente comprimindo os elementos da frente e deformando o pneu.
- A força de cisalhamento longitudinal atira para trás a pressão de contacto diminuindo a fricção localizada nas traseiras do piso do pneu.

Por último são aqui referidas as velocidades mínima e máxima para um pneu num plano de inclinação θ , (primeira e segunda equações Vaz) deduzidas na ref.^a 11, e dadas pelas expressões seguintes, ver a fig.10:

$$v_{\min, \max} = \sqrt{gr \frac{tg\theta \mp \mu_c}{1 + \mu_c tg\theta}}$$

Tanto as forças longitudinais como as laterais são sede de normalização: na indústria fabricante dos pneus usa-se a chamada **máquina da continuidade** que testa os pneus nestes tipos de esforços. Na figura 9 refere-se a um projeto que poderá dar a ideia da avaliação possível do problema.

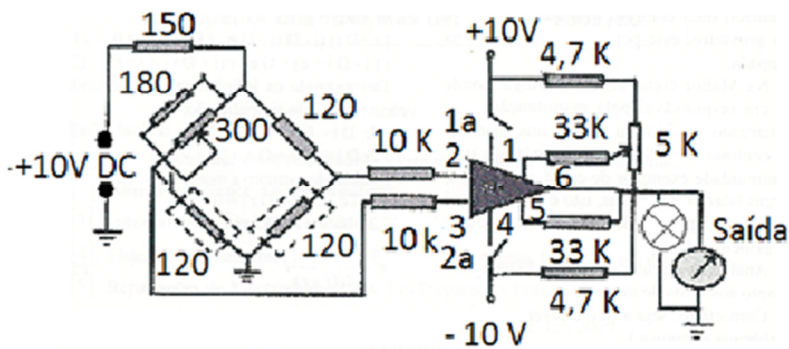


Fig. 9 - Comparador usando dois transdutores de força mantados em ponte.

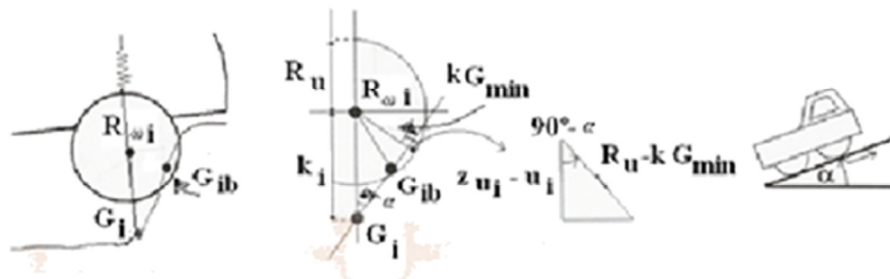


Fig. 10 – Estudo de um unimog num terreno rugoso e em subida.

Referências

- Barczak, C. L. (1977). *Uma introdução à análise de sistemas lineares*. Escola Federal de Engenharia de Itajubá-EFEL. S. Paulo: editora Edgard Blücher Ltda.
- Boley, A., & Weiner, J. H. (1960). *Theory of thermal stresses*, New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Cook, R.D. (1963). *A mechanical analysis of coupled tube sheets*, USA, (University Microfilm, Inc., Ann Arbor, Michigan).
- Duysinx, P. (2013). *Architecture des Vehicules*, cours de l'Université de Liège, Bélgica. Retrieved from: <https://docplayer.fr/27476220-Architecture-des-vehicules-pierre-duysinx-universite-de-liege-annee-academique.html>
- Kiencke, U., & Nielsen, L. (2000). *Automotive Control Systems*. Warrendale: Society of Automotive Engineers.
- McConnelee, J. E. (1964). *Analysis of loosely coupled tube sheets*, Abstract in ANS Transactions 7, no 1, Annual Meeting, Philadelphia, Pennsylvania.

- Moraes, E. C., & Fiório, P. R. (2012). *Fundamentos do Sensoriamento Remoto*, (INPE). Retrieved from http://www.leb.esalq.usp.br/disciplinas/Topo/LEB5838/Peterson/Fundamentos_energia_pos.pdf
- Rensburg, T.J.van, (2006). *Dynamic modelling, control and simulation environment development for an eight wheel vehicle*. (Doctoral dissertation in Electrical and Electronic Engineering, University of Johannesburg, South Africa). Retrieved from https://www.researchgate.net/figure/Doppler-Shift-diagram_fig2_241172344
- Vaz, E. E. P. (1987). *Reparações de Eletrodomésticos*. Porto: Lopes da Silva Editora.
- Vaz, E. E. P. (no prelo). *Aerogeradores*, Edição de autor.
- Vaz, E. E. P., & Silva, A. C. M. (1965). *Problemas de Física Atômica*, FCUP. Porto: edição de autor.
- Vaz, E. E. P., Vaz, J. P. B., & Vaz, H. F. B. (no prelo). *Mecatrónica*, Edição de autor.
- Wong, J.Y. (2001). *Theory of Ground Vehicles*. New York: John Wiley and Sons.
- Zudans, Z. (1965). Bending and stretching of elastically coupled circular plates on elastic foundation. *Nuclear Structural Engineering*, 1(1), 21-46. doi: [https://doi.org/10.1016/0369-5816\(65\)90095-5](https://doi.org/10.1016/0369-5816(65)90095-5)