Recebido: 27-04-2021 | Aprovado: 10-05-2021 | DOI: https://doi.org/10.23882/DI2159

¿Cómo impacta el conocimiento que tiene un profesor acerca de la teoría APOE sobre su conocimiento especializado?

How does a teacher's knowledge of APOE theory impact his or her specialized knowledge?

José Antonio Sánchez-García, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
(joseantonio.sanchezgarcia@viep.com.mx)

Eric Flores-Medrano, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
(eflores@fcfm.buap.mx)

Lidia Aurora Hernández Rebollar, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
(lhernan@fcfm.buap.mx)

Estela Juárez-Ruiz, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México
(estela.juarez@correo.buap.mx)

Resumen: En este artículo se explora la influencia que tiene, sobre el resto del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, su conocimiento sobre teorías formales de aprendizaje. Para dicho fin se eligió el modelo MTSK para explorar el conocimiento especializado y la teoría APOE como teoría formal de aprendizaje. El trabajo fue realizado con dos profesores mexicanos de nivel medio superior que habían cursado estudios de máster y en cuyo trabajo final utilizaron la teoría APOE. Analizamos sus trabajos finales de tesis en la parte referente al diseño de secuencias didácticas. En los resultados presentamos cómo el diseño de actividades de los informantes muestra evidencia del Conocimiento Didáctico del Contenido, pues se observa una movilización de conocimientos correspondientes a los distintos subdominios y categorías enmarcados en dicho dominio.

Palabras Clave: conocimiento especializado, MTSK, profesorado de matemáticas, teoría APOE

Abstract: This article explores the influence of knowledge of formal learning theories on the rest of the math teacher's specialized knowledge. To this end, the MTSK model was chosen to explore specialized knowledge and APOS theory as a formal learning theory. The work was carried out with two top mid-level Mexican professors who had completed master's degrees and in whose final work they used the APOS theory. We analyzed his final work in the part related to the design of teaching sequences. In the results we present how the design of the activities of the informants shows evidence of the Pedagogical Content Knowledge, as there is a mobilization of knowledge corresponding to the different subdomains and categories framed in that domain.

Keywords: specialized knowledge, MTSK, math teachers, APOS theory

Introducción

Esta investigación plantea relacionar el conocimiento del profesor de matemáticas con respecto a las teorías institucionalizadas, en particular la teoría APOE, con los dominios y subdominios del conocimiento especializado del profesor de matemáticas enmarcados en el *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), y con esto poder aportar al desarrollo teórico de dicho modelo.

Sosa, Contreras, Gómez-Chacón, Flores-Medrano y Montes (2017) realizan un análisis sobre lo mencionado anteriormente, donde mencionan que:

"Estamos interesados en analizar qué conocimiento especializado se requiere para abordar determinadas situaciones de aprendizaje de temas matemáticos […] y cómo los estudiantes para profesor de Matemáticas (EPP) pueden desarrollar conocimiento especializado a partir del análisis de situaciones reales de aula" (p. 72).

Es por esto que esta investigación ayudará a entender cómo el conocer una teoría institucionalizada y trabajar con ella, modifica o desarrolla algunos subdominios del MTSK y cómo esto moviliza el conocimiento especializado del profesor de matemáticas, logrando de esta forma contribuir al desarrollo teórico de dicho modelo.

Marco Teórico

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas. El MTSK es un modelo enfocado en el conocimiento del profesor de matemáticas que, además de ser una propuesta teórica, también es una herramienta metodológica que le permite al investigador analizar las distintas prácticas y conocimientos que tiene un profesor de matemáticas durante la planeación y puesta en marcha de sus clases, así como en el diseño de actividades (Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar y Carrillo, 2014).

El MTSK es un modelo que "considera el carácter especializado del conocimiento del profesor de manera integral en todas sus subdimensiones y evita hacer alusión a referentes externos" (Flores-Medrano et al., 2014, p. 71).

Este modelo, considera virtudes del *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), principalmente, la distinción del conocimiento del profesor en dos dominios, el conocimiento matemático (MK, por sus siglas en inglés) y el conocimiento didáctico del contenido (PCK, por sus siglas en inglés), por esto se puede considerar al MTSK como una reconfiguración del MK y reinterpretación del PCK que se consideran en el MKT y busca, como ya se explicó, una nueva noción de conocimiento especializado (Carrillo-Yañez et al., 2018).

Dentro de esta reinterpretación y reconfiguración del MKT, el MTSK divide cada uno de estos dominios en tres subdominios y, a su vez, cada subdominio en diversas categorías, con el objetivo de lograr esa especificidad con respecto al análisis del conocimiento especializado del profesor.

En relación con el conocimiento matemático, este dominio considera el conocimiento que tiene un profesor de matemáticas acerca del contenido matemático (conocimiento de los temas) y cómo se relacionan entre sí desde la visión matemática (conocimiento de la estructura matemática) e involucra las actividades propias de la disciplina científica (conocimiento de la práctica matemática).

En el conocimiento didáctico del contenido se considera el conocimiento que se tiene por parte del profesor, sobre lo que se indica curricularmente que se debe aprender acerca de un objeto matemático en un determinado nivel educativo (conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas), las estrategias y herramientas apropiadas para su enseñanza (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas), junto con todo lo que implica su proceso de aprendizaje (conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas).

Un esquema de este modelo (Figura 1) se presenta en Flores-Medrano et al. (2014) donde se pueden observar estos dos dominios y los tres subdominios correspondientes.

De manera más específica, el Conocimiento de los Temas involucra el conocimiento con respecto a las propiedades, fundamentos y las distintas formas de definir los objetos matemáticos (definiciones, propiedades y fundamentos), sus usos y aplicaciones (fenomenología y aplicaciones), las distintas formas en la que se pueden representar (registros de representación), así como los algoritmos y resultados que lo envuelven (procedimientos).

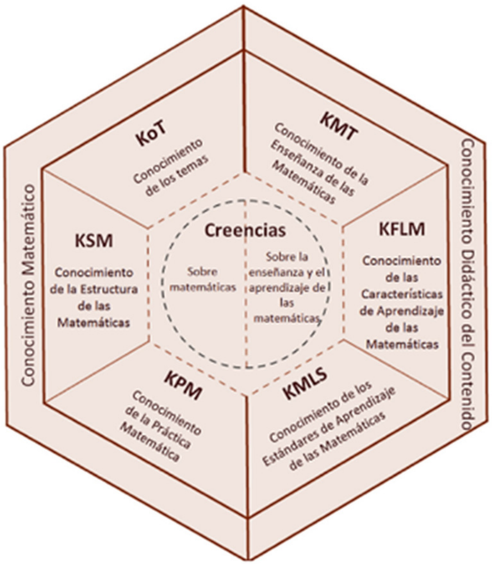

Figura 1. Modelo MTSK (Flores-Medrano et al., 2014)

El Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas considera lo que se conoce acerca de poder comunicar o comprender un objeto matemático de manera más simple (conexiones de simplificación), la relación de un concepto con el origen de otro (conexiones transversales), la de completar o añadir elementos para comprenderlo (conexiones auxiliares) o incluso el poder reflexionar o entender el mismo concepto desde otra área más avanzada que en la se presenta (conexiones de complejización).

Por su parte, el Conocimiento de la Práctica Matemática refiere a un metaconocimiento donde se consideran las prácticas del quehacer matemático como disciplina (demostrar, definir, ejemplificar, etc.).

Por otro lado, el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje involucra el conocimiento sobre lo que se debe enseñar desde el punto de vista curricular (contenidos que se requieren enseñar), el nivel de comprensión que el alumno debe construir junto con los procesos estandarizados que relacionan dichos contenidos (nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado) junto con la relación con los contenidos previos y consecutivos al que se está estudiando (secuenciación de los temas).

El Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas se refiere al conocimiento acerca de diversas teorías (formales o no) de enseñanza, estrategias, técnicas, tareas, y actividades que ayuden en la enseñanza de cierto concepto e incluso los diversos recursos (digitales o físicos) que apoyen en dicha tarea.

Por último, el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas hace alusión al conocimiento que involucra las teorías de aprendizaje (formales o no), las dificultades y fortalezas a las que se pueden enfrentar los alumnos, junto con el interés que el mismo concepto genera y la forma en la que el estudiante interactúa con él.

A manera de síntesis, se presentan la Tabla 1 y la Tabla 2, en donde se observa la distribución de las categorías en sus respectivos subdominios y dominios considerados en el MTSK.

Tabla 1. Subdominios y Categorías del MK considerados en el MTSK

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento Matemático (MK)	Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos
		Definiciones, propiedades y fundamentos
		Registros de representación
		Fenomenología y aplicaciones
	Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones de simplificación
		Conexiones de complejización
		Conexiones auxiliares
		Conexiones transversales
	Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Metaconocimiento correspondiente al quehacer matemático (definir, demostrar, usar heurísticos, ejemplificar)

Fuente: Elaboración propia y adaptado de Carrillo-Yañez et al., 2018.

Tabla 2. Subdominios y Categorías del PCK considerados en el MTSK

Dominio	Subdominio	Categoría
Conocimiento didáctico del contenido (PCK)	Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de la matemática
		Recursos de enseñanza (físicas y digitales)
		Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos
	Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas
		Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas
		Interacción del estudiante con el contenido
		Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas
	Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos que se requieren enseñar
		Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado
		Secuenciación de los temas

Fuente: Elaboración propia y adaptado de Carrillo-Yañez et al., 2018.

La Teoría APOE. La teoría APOE tiene sus bases en la abstracción reflexiva de Piaget, la cual refiere a la interacción entre el sujeto que aprende y el objeto a aprender, esto a partir de una sucesión de acciones materiales en un sistema de operaciones interiorizadas (Arnon et al., 2014).

Dentro de la teoría APOE, una estructura mental es cualquier cosa construida en la mente capaz de seguir desarrollándose, que un sujeto utiliza para dar sentido a una situación matemática específica; y un mecanismo mental refiere al medio por el cual la estructura mental se desarrolla (Villabona y Solange, 2016).

Esta teoría marca que, cuando un sujeto comienza el proceso de construcción de un objeto matemático, realiza transformaciones en otros objetos construidos de manera previa (acción) con el fin de adaptarlos para construir el nuevo objeto. Después de repetir una acción y reflexionar sobre ella (interiorización) llega un momento en el cual, el sujeto puede reflexionar sobre el objeto, pero ya sin interactuar con el (proceso), este proceso además de darse a partir de una acción, también puede generarse como resultado de dos o más procesos previos (coordinación). Cuando el sujeto logra pensar en el proceso ya no como una estructura dinámica sino como una estática (encapsulación), se considera que ya ve dicho proceso como un todo y que realiza transformaciones en dicha totalidad (objeto). Por otro lado, cuando el individuo necesita coordinar un proceso ya visto como objeto para construir uno nuevo, debe regresar sobre el proceso ya construido (desencapsulación) para poder realizar dicha coordinación.

Todos estos mecanismos junto con las estructuras mentales forman parte del desarrollo cognitivo que lleva el sujeto durante el proceso de aprendizaje de un objeto matemático (la interacción previamente mencionada), y por tanto de la construcción de un esquema relacionado a un objeto, donde este esquema es dinámico, pues puede ir evolucionando conforme se van agregando nuevos objetos a estructuras previas. Este análisis desarrollado por la teoría APOE determina un modelo de construcción de un objeto o concepto matemático, dicho modelo se conoce como Descomposición Genética.

Método

Stake (1995) menciona que un estudio de caso es efectivo para particularizar el estudio de programas, personas, fenómenos e interpretaciones; y por su parte Rosales (2018), añade que dicho estudio puede considerar a un solo elemento o a varios que formen parte de la población objeto de estudio. Más aún, Stake, caracteriza un tipo de estudio de caso, como el estudio de caso instrumental, el cual es útil cuando se tiene como propósito comprender un fenómeno.

Por lo anterior, y dado que no se utilizan procedimientos estadísticos durante el proceso de investigación, este trabajo corresponde a una investigación de corte cualitativo e interpretativo por medio de un estudio de caso instrumental, pues se busca comprender el fenómeno correspondiente al movimiento de conocimiento por parte de dos profesores de matemáticas que conocen y aplican la teoría APOE al diseñar una secuencia de actividades basada en dicha teoría.

En cuanto a las etapas de la investigación, nos ajustamos a las características metodológicas propias del MTSK. Comenzando con el análisis didáctico, siguiendo con la obtención de los instrumentos (y por tanto de la información), la organización de la información (en indicio, evidencia y oportunidad de investigación) y terminando con la discusión de resultados.

Una descripción de cada una de estas etapas, así como su aplicación en nuestra investigación la podemos encontrar en la Tabla 3.

Los informantes para este trabajo son dos profesores con estudios de maestría profesionalizante cuyo trabajo de grado fue desarrollado bajo la teoría APOE. Dichos informantes basaron su proyecto de investigación, así como su formación en la teoría APOE, en diversos autores (e.g. Borja, 2015; Cottrill, 1996; Pons, 2014).

Nuestro primer acercamiento con dichos informantes fue a través del análisis didáctico de sus trabajos de tesis. Una vez realizado dicho análisis, nuestro segundo acercamiento fue a través de una entrevista clínica y un cuestionario, donde se buscó confirmar o modificar aquella información que durante el análisis de contenido se catalogó, en términos de Escudero-Ávila et al. (2016), como indicio u oportunidad de investigación.

Es importante mencionar que uno de nuestros informantes, Adrián, basó su diseño de actividades en una descomposición genética para el tema de límite de una función y en una secuencia de actividades de Pons (2014); y el otro informante, Fernando, en una descomposición genética para el tema de sistemas de ecuaciones lineales, además de considerar un entorno virtual de aprendizaje asistido por GeoGebra.

Tabla 3. Etapas de la investigación

<table>
<tr><th>Etapa</th><th colspan="2">Descripción</th><th>Aplicación en la investigación</th></tr>
<tr><td>Análisis didáctico</td><td colspan="2">Profundiza en el análisis cognitivo, de contenido e instruccional y permite comprender las manifestaciones de conocimiento de los docentes y permite al investigador tener sensibilidad teórica</td><td>Se acercó a la teoría APOE para obtener la sensibilidad respectiva para comprender los instrumentos</td></tr>
<tr><td>Obtención de los instrumentos</td><td colspan="2">Recolección de los datos a partir de videograbaciones, grabaciones de clase, notas de campo, diseño de tareas, discusiones grupales, foros de discusión, cuestionarios y entrevistas semiestructuradas como complemento</td><td>Selección de dos trabajos de tesis de maestría donde se utiliza la teoría APOE como base para el diseño de una secuencia de actividades y se complementa con una entrevista semiestructurada y un cuestionario</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Organización de la información</td><td>Evidencia de conocimiento</td><td>Elemento que ayuda a afirmar que el docente posee cierto conocimiento</td><td rowspan="3">Se identificaron y clasificaron elementos a partir de las descripciones de las actividades, y se complementó dicha clasificación con las respuestas de la entrevista y cuestionario por parte de los informantes</td></tr>
<tr><td>Indicio de conocimiento</td><td>Elemento que causa sospecha acerca de la posesión de un conocimiento</td></tr>
<tr><td>Oportunidad de investigación</td><td>Elementos que permiten explorar conocimiento no considerado inicialmente</td></tr>
<tr><td>Discusión de resultados</td><td colspan="2">Corresponde a la interpretación y descripción de los conocimientos puestos en movimiento (subdominios y categorías)</td><td>Se presenta en la sección de análisis</td></tr>
</table>

Fuente: Elaboración propia y adaptado de Escudero-Ávila et al. (2016).

Análisis

A continuación se presentan, en dos secciones, algunas de las descripciones de actividades donde se encuentran evidencias de conocimiento por parte de nuestros informantes. Estas dos secciones corresponden a los dominios principales del MTSK, es por ello que, durante la presentación de las evidencias, se mostrarán las evidencias de ambos informantes que correspondan al dominio y categoría a la que se esté haciendo referencia.

Evidencias de conocimiento para el MK. Con respecto a la categoría registro de representación, una de las descripciones donde Adrián muestra evidencia de este conocimiento es la correspondiente a sus actividades 3, 4 y 5 (Figura 1). En estas actividades, se le presenta al alumno una función y una tabulación con algunos valores de x cercanos a un x_0 específico donde el alumno debe completar la tabla evaluando la función en los valores de x propuestos. Seguido de esto, el alumno deberá responder preguntas sobre el comportamiento de dicha función con respecto al comportamiento de la variable independiente.

> Las tareas 3, 4 y 5 se presentan en modo algebraico-numérico según los tipos de representación considerados en (Pons, 2014).
> Algebraico por la forma en que se presenta la función y numérico por los datos que necesita el estudiante para lograr responder la segunda pregunta. En las actividades 3 y

Figura 2. Extracto de la tesis de Adrián, actividades 3, 4 y 5.

En la Figura 2, se observa que Adrián especifica el tipo de representación utilizada en dichas actividades, que, como ya se había mencionado, tiene su base en lo propuesto por Pons (2014).

Por otro lado, Fernando muestra evidencia de conocimiento con respecto a esta misma categoría del subdominio del Conocimiento de los Temas, durante sus descripciones, pero dicha evidencia se ve confirmada gracias a una respuesta que proporciona durante la entrevista.

Investigador: Durante la explicación de los objetivos de cada una de las actividades mencionas cosas sobre registros de representación, entonces, nos preguntábamos ¿en qué medida alguna teoría de registros de representación es considerada para el diseño de las actividades?

Fernando: Nosotros consideramos un poco de esto de registros de representación de Duval, pero más que nada, utilizamos este constructo de multi-representación de la tecnología, (…) en otro tipo de construcciones (refiriéndose a los applets) ellos tienen tres representaciones del mismo objeto, una algebraica, una matricial, que ahí habría discusiones si es otro tipo de registro o es el mismo, y la geométrica o gráfica, por eso utilizamos, más bien, el constructo de multi-representaciones.

En el extracto previo, Fernando hace explícito el uso del constructo de multi-representaciones como base primordial para el diseño de sus actividades y, en efecto, sus actividades presentan el uso de dicho constructo, principalmente en los applets. Por tal motivo, se considera como evidencia de conocimiento por parte de Fernando en la categoría de registros de representación correspondiente al subdominio del Conocimiento de los Temas.

Un ejemplo donde se observa lo mencionado sobre multi-representaciones se puede notar en la Figura 3, la cual corresponde al applet diseñado por parte de Fernando para la actividad 16, la cual corresponde a la presentación de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

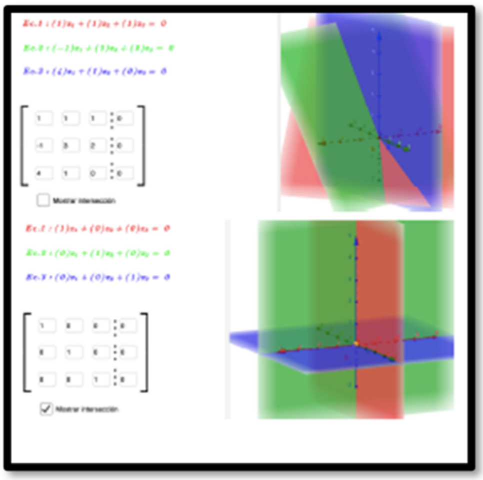

Figura 3. Extracto de la tesis de Adrián, actividad 16.

Con relación a la categoría de procedimientos, dentro del subdominio del Conocimiento de los Temas, podemos encontrar una evidencia en el trabajo de Adrián. Dicha evidencia aparece en la descripción de la actividad 11. En esta se le presenta al alumno la función $\boldsymbol{f(x) = -2}$ y se le pide que complete una tabla, donde debe colocar los valores de las distancias en valor absoluto, entre valores de $\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{4}$, y lo mismo para los respectivos valores de $\boldsymbol{f(x)}$ y $\mathbf{-2}$, seguido de esto, se le pide responder preguntas a partir de dicha tabla (ver Figura 4).

La pregunta 3 busca que los estudiantes coordinen las aproximaciones en el dominio con las aproximaciones en sus imágenes en términos de desigualdades, guiándolos a la reflexión de que para cualquier valor que tome x en la tabla siempre se cumplirá que la distancia en valor absoluto de $f(x)$ y 4 es menor que 0.0001.

Figura 4. Extracto de la tesis de Adrián, pregunta 3, actividad 11.

Para el caso de Fernando, la evidencia de conocimiento para esta categoría se presenta en la actividad 15. En esta se le proporciona al alumno un applet donde se le presentan la representación vectorial y gráfica de una intersección de dos planos (Ver Figura 5).

Para este caso el estudiante deberá identificar el espacio mínimo común que es $\mathbb{R}^3$, por lo que es necesario contar con una concepción *Objeto* de SEL, e identificar que existe una variable libre, en este caso z. Para construir el CS-SEL el estudiante deberá *desencapsular* el Sistema en cada una de las ecuaciones que lo conforman y establecer una relación funcional para cada una de las variables que cuentan con pivote y posteriormente sustituir la variable libre por un parámetro, en este caso r e identificar que con los elementos disponibles es posible construir la ecuación de la recta en $\mathbb{R}^3$ con un punto y un vector director, los cuales deberá capturar en la construcción y verificar que la recta propuesta es verdaderamente la intersección entre los planos.

Figura 5. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 15.

En este caso, Fernando explica el procedimiento que el alumno debe realizar para hallar y verificar gráficamente la intersección de dos planos a partir de un sistema de ecuaciones lineales en términos de la Teoría APOE, dado lo explícito de esta descripción, se considera como evidencia de conocimiento para la categoría de procedimientos.

En cuanto a la categoría definiciones, propiedades y sus fundamentos, se presentan las siguientes evidencias de conocimiento. Por parte de Adrián, una evidencia clara es la correspondiente a la descripción de la pregunta 2 de la actividad 10 (Figura 6). En dicha actividad se le pide al alumno que, a partir de una tabulación, reflexione acerca de qué tan próximos deben estar los valores de $\boldsymbol{x}$ de un $\boldsymbol{x_0}$, para que las diferencias de $\boldsymbol{f(x)}$ y $\boldsymbol{L}$ sean menor que cierto valor.

La pregunta 2 busca que los estudiantes manifiesten la existencia del límite, ya sea mediante argumentación de las aproximaciones laterales coincidentes, pero que sean capaces de desarrollar un argumento más mediante la coordinación de las aproximaciones métricas en el dominio y codominio de la función, en otras palabras, se busca que los estudiantes noten que los valores de las diferencias en valor absoluto entre los valores de x y 2 se aproximan a 0, cando x se aproxima a 2. Una interpretación similar puede surgir con las distancias en valor absoluto de $f(x)$ y 3, y que por lo tanto, si determinamos que tan próximos deben estar los valores de $f(x)$ a 3 en valor absoluto, esto determina que siempre es posible hallar un conjunto de valores de x en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio. Por lo tanto, en caso de que no se cumpla la restricción solicitada para ningún conjunto de valores de x en términos de desigualdades, podemos decir que la función no tiene límite en el punto determinado. (DG5)

Figura 6. Extracto de la tesis de Adrián, pregunta 2, actividad 10

En la Figura 6 se observa que Adrián tiene conocimiento acerca de la definición formal de límite, pues cuando explica que “siempre es posible hallar un conjunto de valores de $\boldsymbol{x}$ en términos de desigualdades en el dominio que satisfacen la condición solicitada en el codominio”, Adrián hace referencia a los cuantificadores de la definición formal, además dice que, al no cumplirse lo mencionado, la función no tiene límite. Es por esto que dicha descripción es una evidencia de conocimiento para la categoría definiciones por parte de Adrián.

Para el caso de Fernando, una de las evidencias para dicha categoría, corresponde a la descripción de la actividad 16, pues en ella se le proporciona al alumno la definición de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo acompañado de un teorema relacionado con dichos sistemas (Figura 7).

> La actividad inicia presentando el concepto de SEL Homogéneo esto con la intensión de que el estudiante verifique incluso geométricamente este teorema al menos en $\mathbb{R}^3$.

Figura 7. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 16

Dicha evidencia, además de presentarse en la actividad misma, por lo ya mencionado, también se confirma por lo explícito que es la descripción al mencionar la intención de presentar dicha definición y dicho teorema en conjunto con un applet.

Un resumen sobre los conocimientos relacionados al MK y sus subdominios por parte de nuestros informantes se observa en la Tabla 4.

Es importante mencionar que, aunque en la Tabla 3 se observa que existe evidencia de conocimiento con respecto a una gran mayoría de categorías, dichas evidencias son pocas en comparación con las que se hallaron para el PCK descritas más adelante. Por otro lado, también es preciso mencionar que de los subdominios del MK, el que presentó una mayor cantidad de movimiento es el del Conocimiento de los Temas, en particular las categorías registros de representación y definiciones, propiedades y fundamentos. En el caso de la categoría fenomenología y aplicaciones, Fernando es el único que mostró evidencia de conocimiento. Creemos que esto se debe a que la secuencia de actividades tiene una carga de aplicaciones al ser destinada a un grupo de ingenieros y en el caso de Adrián, el tema de límite de una función suele impartirse en un contexto puramente matemático a nivel bachillerato.

Evidencias de conocimiento para el PCK. Con respecto a este dominio podemos afirmar que es el que presentó mayor movimiento por parte de nuestros informantes. Algunos ejemplos de evidencia de conocimiento con respecto a este dominio se presentan a continuación.

En cuanto a la categoría teorías de aprendizaje, correspondiente al Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas, Adrián muestra evidencia de conocimiento en sus descripciones, pues en todas ellas hace referencia al objetivo particular de la descomposición genética que se quiere lograr con dichas actividades, de igual forma esta evidencia es confirmada por las respuestas que Adrián da en el cuestionario que se le propuso.

Pregunta 1: Hemos notado que Pons (2014) es el principal referente en tu tesis e incluso notamos que tu diseño tiene aportes de su trabajo. ¿Hasta qué punto el diseño es fiel a lo propuesto por Pons y en qué medida propusiste

Tabla 4. Resumen de conocimientos puestos en marcha en el MK

Subdominio	Categoría	Adrián	Fernando
Conocimiento de los temas (KoT)	Procedimientos	Evidencia	Evidencia
	Definiciones, propiedades y fundamentos	Evidencia	Evidencia
	Registros de representación	Evidencia	Evidencia
	Fenomenología y aplicaciones		Evidencia
Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM)	Conexiones de simplificación		
	Conexiones de complejización	Evidencia	
	Conexiones auxiliares	Evidencia	Evidencia
	Conexiones transversales		
Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Metaconocimiento correspondiente al que hacer matemático (definir, demostrar, usar heurísticos, ejemplificar)	Evidencia	Indicio

Fuente: Elaboración propia.

modificaciones en su diseño? Por favor comenta con detalle todos aquellos elementos que permitan comprender a profundidad tus propuestas o modificaciones.

Adrián: Pons aporta en el diseño de las actividades de la secuencia didáctica. Digamos que la mayor aportación que tiene Pons dentro de mi tesis es, precisamente, en el diseño de las actividades, ya que en el diseño de sus actividades involucra los primeros tres pasos de la descomposición genética de Cottrill. Además, hay una adaptación del cuarto paso [realizar acciones sobre el concepto de límite] y un acercamiento al quinto paso [Reconstruir el proceso de coordinar (mediante $\boldsymbol{f}$) la interiorización de evaluar la función en algunos puntos y el proceso en el rango por el cual las imágenes se acerca a $\boldsymbol{L}$], a lo que él llama la concepción métrica, una de las aportaciones que también en el trabajo de tesis es los modos de representación […] mismas que también fueron consideradas en el diseño de la secuencia didáctica.

Pregunta 3: ¿Cómo se relacionan las actividades y sus objetivos con lo que se espera en el aprendizaje e interacción del alumno?

Adrián: Que los alumnos construyan su aprendizaje de acuerdo con la secuencia trazada, ya que una actividad va ligada con la otra, además de que no se les complique trabajar en algunas de las representaciones en las que se presentan dichas actividades.

Con respecto a Fernando, él presenta evidencia de movilizar conocimiento en esta misma categoría, pues de igual forma se basó en una descomposición genética, en este caso en la de Borja (2015), la cual también se basa en el modelo 3UV. Además de apoyarse en esta descomposición genética, Fernando agrega como base a su diseño de actividades la teoría de multi-representaciones. Un ejemplo de esto se observa en la Figura 8.

En la Figura 8 es explícita la evidencia de conocimiento, pues en ella se observa, en términos de la teoría APOE (acción), lo que se espera que el alumno aprenda con ayuda de esta actividad y en términos del modelo 3UV (I3 y F2), la concepción de la variable que se desea lograr.

Con respecto al nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado, correspondiente al Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas, también se presenta un gran movimiento de conocimientos en ambos informantes, esto debido a que las propias descomposiciones genéticas marcan sus objetivos a partir del desarrollo conceptual y procedimental esperado, tanto del concepto matemático principal como de los auxiliares. Un ejemplo claro de esta evidencia lo podemos observar en Fernando, en uno de sus comentarios durante la entrevista.

> En la segunda tarea se espera que el estudiante verifique que dichas coordenadas del punto son solución de la ecuación lineal original (*Acción*), es decir sustituya los valores de las variables y verifique si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**).
>
> En la tercera tarea el estudiante deberá verificar cuáles de las parejas ordenadas dadas corresponden a soluciones de la ecuación lineal y cuáles no, nuevamente mediante sustitución directa en la ecuación lineal (*Acción*). Nuevamente deberá sustituir los valores de las variables y verificar si la ecuación es un enunciado verdadero (**I3**), si es así, la pareja ordenada será solución de la ecuación.
>
> Por último se busca verificar que el estudiante es capaz de identificar la n-ada genérica dada como una relación funcional entre las variables x y y, y de encontrar el valor de la variable x dando valores al parámetro r; esta tarea involucra identificar al parámetro r como número general, y por lo tanto, asigne los valores propuestos, y determine el valor de la variable dependiente dado un valor de la independiente (**F2**).

Figura 8. Extracto de la tesis de Fernando, actividad 3

Fernando: En la Descomposición [Genética], por ejemplo, una de las cosas que los muchachos deben reflexionar es con el espacio en el que debe vivir un sistema de ecuaciones, o sea, reconocer que, aunque las variables no estén de manera explícita en una ecuación, si el sistema está en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ o $\mathbb{R}^5$, que las variables ahí pueden quedar libres.

En ambos casos, con respecto al subdominio del Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, ambos informantes presentan evidencia de conocimiento en la categoría estrategias, técnicas, tareas y ejemplos de enseñanza, pues todas sus actividades, como las funciones (en el caso de Adrián) y los sistemas de ecuaciones (en el caso de Fernando) se apegan a lo que describe la descomposición genética correspondiente, lo que ocasiona que todas ellas tengan una intención clara.

Tabla 4. Resumen de conocimientos puestos en marcha en el PCK

Subdominio	Categoría	Adrián	Fernando
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)	Teorías de enseñanza de la matemática	Evidencia	Evidencia
	Recursos de enseñanza (físicas y digitales)		Evidencia
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	Evidencia	Evidencia
Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Teorías de aprendizaje de las matemáticas	Evidencia	Evidencia
	Fortalezas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas	Evidencia	Evidencia
	Interacción del estudiante con el contenido	Evidencia	Evidencia
	Intereses y expectativas del aprendizaje de las matemáticas	Evidencia	Evidencia
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Contenidos que se requieren enseñar	Evidencia	Evidencia
	Nivel de desarrollo conceptual y procedimental esperado	Evidencia	Evidencia
	Secuenciación de los temas	Evidencia	Evidencia

Fuente: Elaboración propia.

De igual manera, en cuanto a la categoría teorías de enseñanza, se tiene evidencia para afirmar que tanto Adrián como Fernando presentan un movimiento de dicho conocimiento, pues al buscar que las actividades cumplieran con lo señalado en la descomposición genética, esta se convirtió en una teoría de enseñanza, pues con base en esta se seleccionó y analizó la pertinencia de cada una de las actividades.

Un resumen de los conocimientos movilizados por parte de nuestros informantes en el dominio PCK se puede observar en la Tabla 5.

En la Tabla 5 se observa que existen diversas evidencias de conocimiento por parte de ambos informantes en las categorías correspondientes a los subdominios del PCK, lo cual, de alguna manera, era de esperarse por la naturaleza de los informantes y de los instrumentos. Sin embargo, se puede observar que solamente Fernando presenta evidencia con respecto a recursos de enseñanza (físicos y digitales), pues él, en comparación a Adrián, se apoyó de un Entorno Virtual de Aprendizaje basado en applets diseñados por él en GeoGebra.

Otro fenómeno importante de mencionar corresponde a que, aunque hay una gran movilidad en todas las categorías, existen algunas que tienen mayor presencia que otras, como es el caso de nivel de desarrollo procedimental y conceptual esperado, teorías de enseñanza, teorías de aprendizaje y estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza, esto debido a las propias características de la descomposición genética utilizada como base.

Conclusiones

Durante el análisis se pudo observar que la mayor cantidad de conocimientos movilizados por parte de los informantes corresponde al dominio del conocimiento didáctico del contenido, lo cual era de esperarse, pues la teoría APOE es una teoría de aprendizaje de las matemáticas, que dentro de sus constructos tiene el concepto de descomposición genética, la cual marca una serie de pasos que se deben considerar para poder realizar un buen acercamiento a un objeto matemático particular.

Aunque la teoría APOE es reconocida como una teoría de aprendizaje de las matemáticas, pudimos observar que nuestros informantes también la utilizaron como una teoría de enseñanza, particularmente por el hecho de que en esta teoría se considera el ciclo de enseñanza ACE (actividades, discusión en clase y ejercicios). Este fenómeno lo podemos observar más claramente en el diseño de Fernando, pues en su tesis presenta actividades para cada momento de este ciclo de enseñanza, principalmente el momento de discusión, pues este se presenta cuando se realiza la interacción con los applets de GeoGebra, después de la solución de actividades y ejercicios. En el caso de Adrián, el fenómeno se observa de manera indirecta, pues, aunque en la presentación de actividades, no hace explícito el momento del ciclo de enseñanza, durante cada una de sus actividades se puede percibir cada uno de ellos, por ejemplo, en el caso de la discusión, esta se presenta durante las preguntas de reflexión incluidas en las actividades y ejercicios.

El hecho de utilizar la teoría APOE también como teoría de enseñanza es nutrido en el caso de Adrián por la teoría de representaciones y el trabajo de Pons de 2014, y en el caso de Fernando por el modelo 3UV y la teoría de multi-representaciones. Dicho fenómeno permite justificar un gran movimiento de conocimiento por parte de los informantes con respecto a la categoría de teorías de enseñanza.

Por otro lado, aún situados en el dominio Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, pudimos observar que se presenta un movimiento fuerte de conocimiento correspondiente a la categoría que involucra al uso de estrategias, técnicas, tareas y ejemplos, pues, cada una de las actividades que nuestros informantes diseñaron fueron pensadas a partir de la descomposición genética y estuvieron compuestas por ejemplos particulares (en el caso de Adrián, límite de funciones y en el caso de Fernando, sistemas de ecuaciones) que permiten lograr la interiorización de acciones y la construcción y coordinación de procesos.

En cuanto al Conocimiento de las Características de Aprendizaje de las Matemáticas, gracias al orden que la misma descomposición genética tiene, tanto en la forma de construir el objeto como en los conocimientos necesarios para dicha construcción, se presenta un gran movimiento en la categoría desarrollo conceptual y procedimental. Por otro lado, aunque en las descripciones de las actividades no se presentan evidencias sobre la secuenciación de los temas, se considera que los informantes tienen conocimiento sobre esta categoría, pues en una sección previa a describir las actividades, hacen mención del plan curricular de la materia que le corresponde y de los conocimientos previos necesario para abordar el tema de estudio.

Con respecto al dominio del Conocimiento Matemático, pudimos observar que nuestros informantes presentan una movilización de conocimientos fuerte en los subdominios relacionados con el conocimiento de los temas y con la estructura de las matemáticas.

Para el caso del Conocimiento de los Temas, su movilización es justificada en la categoría registros de representación, pues en el caso de ambos informantes se consideró una teoría de registros de representación, en el caso de Adrián la considerada y descrita por Pons en 2014 y en el caso de Fernando por la teoría de multi-representaciones en un entorno virtual de aprendizaje. De igual manera, otra categoría que permite la justificación de movilización del Conocimiento de los Temas es la correspondiente a las categorías de procedimientos, definiciones, propiedades y sus fundamentos, pues recordemos que un objetivo que tiene una descomposición genética es describir la construcción de las estructuras de acción, proceso y esquema de un objeto matemático.

En el caso del Conocimiento de la Estructura de las Matemáticas, su movimiento marcado se justifica por la categoría correspondiente a las conexiones auxiliares, pues en ambos casos, se pudo observar que los docentes hacen referencia a conceptos matemáticos con el objetivo de auxiliar su descripción (e.g. sucesión numérica y variable).

De igual manera, se observó que los informantes, al considerar la teoría APOE y basarse en una descomposición genética, la interpretan y la llevan a la práctica como una tendencia didáctica de tipo tecnológica, pues esta herramienta ayuda a que ellos presenten un orden intencionado y logístico en la presentación de las actividades, pues estas están basadas en las construcciones mentales que se supone que debe realizar un sujeto y que se presentan estructuradas y ordenadas en las descomposiciones genéticas.

En resumen, el conocimiento formal de la teoría APOE por parte de los docentes participantes puso en movimiento todas las categorías enmarcadas en los subdominios del MTSK., Mostrando uno mayor a las correspondientes al Conocimiento Didáctico del Contenido, en particular, la categoría nivel de desarrollo conceptual y procedimental del Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas, la categoría teorías de aprendizaje del Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas y las categorías teorías de enseñanza junto con estrategias, técnicas, tareas y ejemplos para la enseñanza correspondientes al Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas.

Lo anterior se puede observar en la Figura 9, en donde los subdominios y categorías de conocimiento con mayor movimiento se muestran enmarcados en un rectángulo de mayor tamaño a comparación de aquellas y aquellos que tienen un movimiento menor.

Agradecimientos

Este trabajo fue realizado gracias al financiamiento del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de México, mediante la beca de maestría asignada con CVU: 1028924. Asimismo, forma parte de las actividades realizadas por la Red Iberoamericana sobre Conocimiento Especializado del Profesorado de Matemáticas (Red Iberoamericana MTSK)

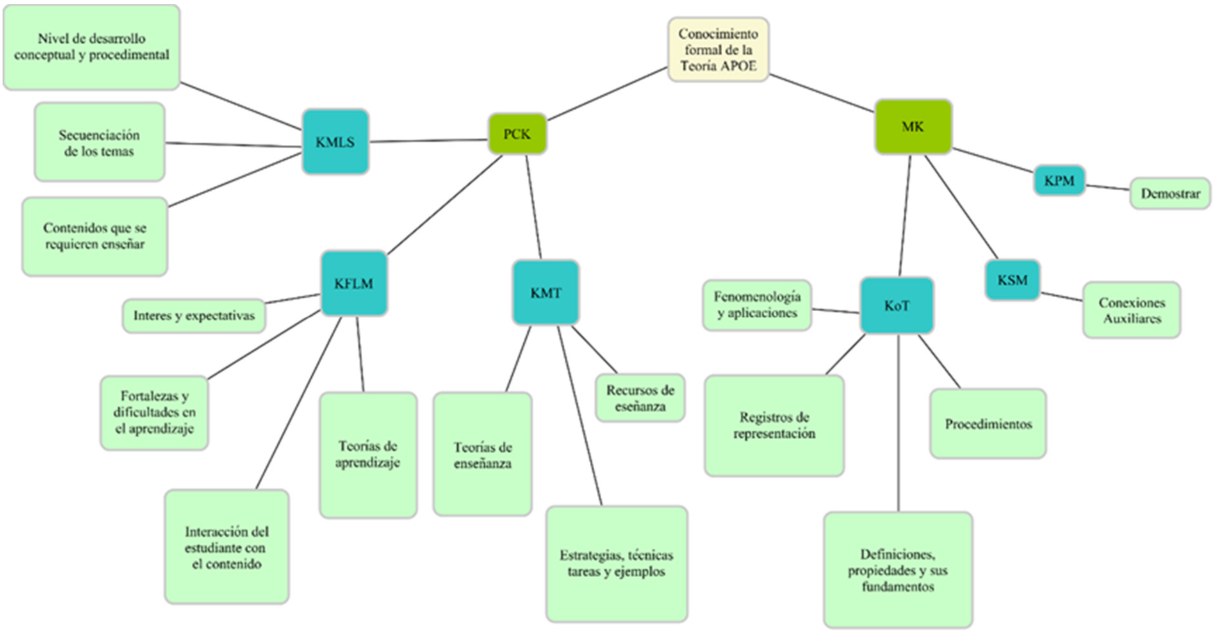

Figura 9. Movilización de conocimientos del MTSK a partir del conocimiento formal de la Teoría APOE.
Fuente: Elaboración propia

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Escudero-Ávila, D., Gomes, J., Muñoz-Catalán, M. C., Flores-Medrano, E., Flores, P., Rojas, N., & Aguilar, A. (2016). Aportaciones metodológicas de investigaciones con MTSK. In J. Carrillo, L.C. Contreras y M., Montes (Eds.). *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 60–68). Universidad de Huelva Publicaciones.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, Á., & Carrillo, J. (2014). Nuestra modelación del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, el MTSK. In J. Carrillo, N. Climent, L.C. Contreras, M.A. Montes, D. Escudero y E. Flores (Eds.), *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas* (pp. 71–93). Universidad de Huelva. https://doi.org/10.13140/2.1.3107.4246

Rosales, B. (2018). *Instrumento para explorar la caracterización que hace el profesor de matemáticas del aprendizaje basado en proyectos* (Tesis de maestría inédita). Puebla, México: BUAP.

Sosa, L., Contreras, L. C., Gómez-Chacon, I. M., Flores-Medrano, E., & Montes, M. A. (2017). Sintesis, problemas abiertos, preguntas para la reflexión. In J. Carrillo & L. C. Contreras-Gónzalez (Eds.), *Avances, utilidades y retos del modelo MTSK. Actas de las III Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 71–79). Universidad de Huelva Publicaciones.

Stake, R. (1995). *The Art of case study*. USA: SAGE.

Villabona, D. P., & Roa, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación matemática*, *28*(2), 119-150. https://doi.org/10.24844/EM2802.05